Eine Bijektion $\mathbb{N}_0 \to (\mathbb{N}_0)^2$

Sei $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$.
Man definiert eine Menge A_q durch

$$A_q := \left\{ a \in \{0, \ldots, q-1\}^{(\mathbb{N}_0)} \; : \; \exists k \in \mathbb{N}_0 \quad \underset{j \geq k}{\forall\, j \in \mathbb{N}_0} \quad a_j = 0 \right\}$$

Dann existiert genau eine Abbildung $\Phi_{2,q} : \mathbb{N}_0 \to (\mathbb{N}_0)^2$ mit

$$\forall a \in A_q \quad \Phi_{2,q}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \; q^j \right) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} \; q^j \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} \; q^j \end{pmatrix}$$

Dabei gilt offenbar:

$$\Phi_{2,q} : \mathbb{N}_0 \to (\mathbb{N}_0)^2 \text{ ist bijektiv}$$

Bemerkung:

Die obigen unendlichen Summen sind de facto nur endliche Summen.

Beispiel:

$$\Phi_{2,10}(204040152364) = \begin{pmatrix} 534 \\ 244126 \end{pmatrix}$$