Neues von der binomischen Formel?

Wir betrachten:

```
X X X Y
X X X Y
X X X Y
Y Y Y Y
```

d.h.

$$4 \cdot 4 = 3 \cdot 3 + 4 + 3$$

Man kann das verallgemeinern:

$$(a+1)^2 = a^2 + (a + 1) + a$$

Man erhält dies dadurch, daß man von dem inneren Quadrat ausgeht und dann an den Kanten entlang geht.

Mit der bekannten Formel

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 + 3 \cdot a + 1$$

und dem Ansatz

$$\begin{aligned}(a + 1)^3 &= a^3 + (a + 1)^2 + x + a^2 = \\ &= a^3 + a^2 + 2 \cdot a + 1 + a^2 + x = \\ &= a^3 + 2 \cdot a^2 + 2 \cdot a + 1 + x\end{aligned}$$

erhält man die folgende Gleichung

$$x = a^2 + a = a \cdot (a + 1)$$

So kommt man zu der Vermutung

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad (a + 1)^n = a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^i (a + 1)^{n-1-i}$$

Vor.: Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement 1.

Beh.:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{+} \quad \underbrace{\forall a \in \mathfrak{R} \quad (a + 1)^{n} = a^{n} + \sum_{i=0}^{n-1} a^{i} (a + 1)^{n-1-i}}_{\Leftrightarrow:\ A(n)}$$

Bem.1 Da $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement 1 ist, gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{+} \quad \forall a \in \mathfrak{R} \quad (a + 1) \cdot a^{n} = a^{n+1} + a^{n} = a^{n} \cdot (a + 1)$$

Bem.2 Unter der gleichen Voraussetzung gilt auch:

$$\forall n \in \mathbb{N}_{+} \quad \forall a \in \mathfrak{R} \quad (a - 1)^{n} = a^{n} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i} (a - 1)^{n-1-i}$$

Bew.: durch vollständige Induktion:
Die Induktionsvoraussetzung $A(1)$ ist trivial.
Sei also $k \in \mathbb{N}_+$ und gelte $A(k)$. Dann ist zu zeigen:

$$\forall a \in \Re \quad (a + 1)^{k+1} = a^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a^i (a + 1)^{k-i}$$

Beweis hiervon:

Sei $a \in \Re$. Dann folgt mit $A(k)$:

$$\begin{aligned}
(a + 1)^{k+1} &= (a + 1) \cdot (a + 1)^k = \\
&= (a + 1) \cdot \left(a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot (a + 1)^{k-1-i} \right) = \\
&= (a + 1) \cdot a^k + (a + 1) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot (a + 1)^{k-1-i} = \\
&= a^{k+1} + a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot (a + 1)^{k-i} = \\
&= a^{k+1} + a^k \cdot (a + 1)^0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot (a + 1)^{k-i} = \\
&= a^{k+1} + \sum_{i=0}^{k} a^i \cdot (a + 1)^{k-i}
\end{aligned}$$

Damit ist $A(k+1)$ gezeigt.