Corona Calculator

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 – 10

50670 Köln
Germany

mailto:Christian.Reinbothe@T-Online.DE
http://WWW.Reinbothe.DE

1. HowTo CoronaCalculator.xlsm

1. Download “CoronaCalculator.zip”.

2. Unzip “CoronaCalculator.zip”. Das Archiv enthält “Corona-Cal-cu-lator.xlsm”.

3. Öffnen Sie “CoronaCalculator.xlsm” mit MS EXCEL.

4. Suchen Sie in der Menu-Leiste nach dem Eintrag “Corona”.

5. Wählen Sie diesen Eintrag. Jetzt sehen Sie zwei Buttons:

   “Drop Charts”
   “Corona Prognosis”

6. Waehlen Sie “Corona Prognosis”. Jetzt sehen Sie einen Dialog. Er enthält 5 Textboxes mit Labels:

   “Incubation Period (in days)”

   “r-Value Before (per day)”
   “r-Value Target (per day)”

   “lost (in days)”

   “Infected Humans (at zero)”

7. Die Textbox mit dem Label “Incubation Period (in days)” erlaubt Integers >= 1. Dort können Sie den Wert für die Inkubationszeit eintragen.

8. Die Textbox mit dem Label “r-Value Before (per day)” erlaubt Floats > 0. Dort können Sie den *r*-Wert für die Zeit vor der neuen Corona-Strategie eintragen.

9. Die Textbox mit dem Label “r-Value Target (per day)” erlaubt Floats > 0. Dort können Sie den angepeilten *r*-Wert für die neue Corona-Strategie eintragen.

10. Die Textbox mit dem Label “lost (in days)” erlaubt Integers >= 0. Dort können sie den Wert für die verlorene Zeit vor der Anwendung der neuen Corona-Strategie eintragen.

11. Die Textbox mit dem Label “Infected Humans (at zero)” erlaubt Integers >= 0. Dort koennen Sie den Wert fuer die Anzahl der zum Zeitpunkt 0 erkrankten Menschen eintragen.

12. Tragen Sie die gewuenschten Werte ein und druecken Sie den Button “Plot”.

2. Beschreibung der Tabellen

"CoronaCalculator.xlsm" enthält 5 Tabellen:

1. Die Tabelle "r-Values" enthält den Übergang von einem *r*-Wert zu einem anderen *r*-Wert.

2. Die Tabelle "Infect Rate" enthält die Entwicklung der Infektionsrate für ein ganzes Jahr. Sie hängt mit der Entwicklung des *r*-Werts zusammen.

3. Die Tabelle "Detail lost" wirft einen näheren Blick auf die verlorene Zeit für die Infektionsrate über (2 * lost) Tage.

4. Die Tabelle "Detail Effect" wirft einen näheren Blick auf den Effekt der neuen Corona-Strategie auf die Infektionsrate über (2 * (lost + Incubation Period)) Tage.

5. Die Tabelle "Infections" enthält die Entwicklung der gesamten Anzahl der infizierten Menschen ab Zeitpunkt 0 für ein ganzes Jahr. Dort kann man sehen, welchen Effekt die neue Corona-Strategie hat.

3. Die AWA

Sei I ein Intervall von $\mathbb{R}$ mit $I \neq \varnothing$.
Sei $\xi \in I$.
Sei $\eta \in \mathbb{R}$.
Die AWA, die die theoretische Entwicklung von Infektionen beschreibt, ist bekannt:

$$y'(x) = \alpha(x)\, y(x)$$
$$y(\xi) = \eta$$

mit einer gegebenen steigen Funktion $\alpha : I \to \mathbb{R}$

Das ist eine gewöhnliche lineare DGL. Die zugehörige Lösung dieser AWA ist ebenfalls bekannt und ist zu finden in "Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer-Verlag, ISBN 3-540-16143-0".

4. Die einfachste AWA

Die einfachste Herangehensweise an eine konkrete Infektion ist die Annahme

$\alpha(x)$ ist konstant von einem Wert $c \in \mathbb{R}$

Dann hat die AWA eine sehr einfache Lösung:

$$y(x) = \eta \cdot e^{c \cdot (x - \xi)}$$

Im Falle $\eta \neq 0$ kann man jetzt den sogenannten r-Wert der AWA definieren:

$$r := \frac{y(1)}{y(0)} = \frac{e^{c \cdot (1 - \xi)}}{e^{c \cdot (-\xi)}} = e^{c} > 0$$

d.h.

$$c = \ln(r)$$

Wenn zwei verschiedene AWAs der einfachsten Art den gleichen r-Wert haben, so unterscheiden sich die xy-Diagramme der Lösungen dieser beiden AWAs nur durch die Skalierung der Achsen.

Ein Beispiel:

Die einfachste AWA beschreibt die Entwicklung einer Bakterienkultur ziemlich gut.

Cave!: Diesem Modell sind physikalische Grenzen gesetzt:

1. Irgendwann ist die Erde verbraucht.

2. Irgendwann überschreitet die Geschwindigkeit der räumlichen Ausdehnung bei der Zellteilung die Lichtgeschwindigkeit.

5. Eine komplexere AWA (V1)

Seien $\xi, \eta \in \mathbb{R}$.
Seien $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta \neq 0$.
Wir definieren die Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(x) = \gamma + \delta \cdot (x - \xi)$$

Wir definieren eine weitere Funktion $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\beta(x) = \gamma \cdot (x - \xi) + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot (x - \xi)^2$$

Dann gilt das Folgende:

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind C^∞
$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\beta(\xi) = 0$

Die AWA

$$y'(x) = \alpha(x)\, y(x)$$
$$y(\xi) = \eta$$

hat die Lösung

$$y(x) = \eta \cdot e^{\beta(x)}$$

6. Eine komplexere AWA (V2)

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma > 0$.
Sei $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta \neq 0$.
Sei $\xi \in \mathbb{R}$.
Sei $\eta \in \mathbb{R}$.

Wir definieren ein Intervall $I := \left]\xi - \frac{\gamma}{|\delta|} ; \xi + \frac{\gamma}{|\delta|}\right[$.

Wir definieren die Funktion $\alpha : I \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(x) = \ln\left(\gamma + \delta \cdot (x - \xi)\right)$$

Nach "Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, ISBN 3-871-44492-8" gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= \ln\left(\gamma \cdot \left(1 + \frac{\delta}{\gamma} \cdot (x - \xi)\right)\right) = \\
&= \ln(\gamma) + \ln\left(1 + \frac{\delta}{\gamma} \cdot (x - \xi)\right) = \\
&= \ln(\gamma) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{\left(\frac{\delta}{\gamma} \cdot (x - \xi)\right)^i}{i} = \\
&= \ln(\gamma) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^i}{i} \cdot (x - \xi)^i
\end{aligned}$$

Wir definieren eine weitere Funktion $\beta : I \to \mathbb{R}$ durch

$$\beta(x) = \ln(\gamma) \cdot (x - \xi) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{i}}{i \cdot (i + 1)} \cdot (x - \xi)^{i+1}$$

Dann gilt offenbar:

$\alpha : I \to \mathbb{R}$ und $\beta : I \to \mathbb{R}$ sind C^{∞}
$\beta : I \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\alpha : I \to \mathbb{R}$
$\beta(\xi) = 0$

Die AWA

$$y'(x) = \alpha(x)\, y(x)$$
$$y(\xi) = \eta$$

hat die Lösung:

$$y(x) = \eta \cdot e^{\beta(x)}$$

7. Eine konkrete AWA (V1): Übergang der *r*-Werte

Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$.
Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 \le x_1 < x_2$.
Wir definiere $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ durch

$$c_1 := \ln\left(r_1\right)$$
$$c_2 := \ln\left(r_2\right)$$

Wir definieren die Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(x) := \begin{cases} c_1 & x \le x_1 \\ c_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(c_2 - c_1\right) & x_1 \le x \le x_2 \\ c_2 & x_2 \le x \end{cases}$$

Wir können die zugehörige AWA mit 4. und 5. lösen.

8. Eine konkrete AWA (V2): Übergang der r-Werte

Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $r_1 \neq r_2$ und $r_2 < 2 \cdot r_1$.
Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x_1 < x_2$.
Wir definieren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ durch

$$c_1 := \ln\left(r_1\right)$$
$$c_2 := \ln\left(r_2\right)$$

Wir definieren die Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\alpha(x) := \begin{cases} c_1 & x \leq x_1 \\ \ln\left(r_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(r_2 - r_1\right)\right) & x_1 \leq x \leq x_2 \\ c_2 & x_2 \leq x \end{cases}$$

Wir definieren $\gamma \in \mathbb{R}_+$ und $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta \neq 0$ durch

$$\gamma := r_1 > 0$$
$$\delta := \frac{r_2 - r_1}{x_2 - x_1} \neq 0$$

Wir untersuchen nun die Funktion $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir definieren $\xi \in \mathbb{R}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$\xi := x_1$$
$$I := \left]\xi - \frac{\gamma}{|\delta|} ; \xi + \frac{\gamma}{|\delta|}\right[$$

Dann gilt:

$$x_1 = \xi \in I$$

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{x_2 - \xi} \neq 0$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} c_1 & x \leq \xi \\ \ln\left(\gamma + \delta \cdot (x - \xi)\right) & \xi \leq x \leq x_2 \\ c_2 & x_2 \leq x \end{cases}$$

Wir wollen 6. anwenden. Also müssen wir zeigen:

$$x_2 \in I$$

Beweis hiervon:

$$x_2 \in I \quad \Leftrightarrow$$

$$\xi - \frac{\gamma}{|\delta|} < x_2 < \xi + \frac{\gamma}{|\delta|} \quad \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\gamma}{|\delta|} < x_2 - \xi < \frac{\gamma}{|\delta|} \quad \Leftrightarrow$$

$$-r_1 \cdot \frac{x_2 - \xi}{\left|r_2 - r_1\right|} < x_2 - \xi < r_1 \cdot \frac{x_2 - \xi}{\left|r_2 - r_1\right|}$$

Wegen $x_2 > x_1 = \xi$ und $r_1 > 0$ erhält man:

$$x_2 \in I \quad \Leftrightarrow$$
$$x_2 - \xi < r_1 \cdot \frac{x_2 - \xi}{\left|r_2 - r_1\right|} \quad \Leftrightarrow$$
$$1 < r_1 \cdot \frac{1}{\left|r_2 - r_1\right|} \quad \Leftrightarrow$$
$$\left|r_2 - r_1\right| < r_1 \quad \Leftrightarrow$$
$$-r_1 < r_2 - r_1 < r_1 \quad \Leftrightarrow$$
$$0 < r_2 < 2 \cdot r_1$$

Wegen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ erhält man:

$$x_2 \in I \quad \Leftrightarrow \quad r_2 < 2 \cdot r_1$$

Da I ein Intervall von $\mathbb{R}$ ist und da $x_1, x_2 \in I$, folgt:

$$\left[x_1; x_2\right] \subseteq I$$

Wir können die zugehörige AWA mit 4. und 6. lösen.

9. Über den *r*-Wert

9.1. Interpretation

Der *r*-Wert vergleicht nach Definition die Änderung des Zustand der Infektion zwischen den Zeiten 1 und 0.

Zum Beispiel:

Ein Wert von 1,14 des *r*-Werts der AWA bedeuten dass 100 Menschen im Schnitt 114 andere Menschen in der Zeit von 0 bis 1 infizieren. Der *r*-Wert hängt von der verwendeten Zeiteinheit ab.

9.2. Umwandlung des *r*-Werts von "per day" nach "per week"

Es gilt:

$$r_W := \left(r_D\right)^7$$

9.3. Umwandlung des *r*-Werts von "per week" nach "per day"

Es gilt:

$$r_D := \sqrt[7]{r_W} = \left(r_w\right)^{\frac{1}{7}}$$

9.4. Bemerkung

Es gibt verschiedene Definitionen für den *r*-Wert. Die hier verwendete Definition habe ich im Studium so gelernt.

Wenn man den durchschnittlichen *r*-Wert berechnet, muss man das geometrische Mittel benutzen.

10. Inkubations Zeit

Es gibt mehrere Möglichkeiten fuer die Inkubationszeit. Bitte experimentieren Sie selbst:

1. Die durchschnittliche Inkubationszeit liegt – so weit ich googlen konnte – bei circa 7 Tagen.

   Versuchen Sie 7 Tage als Wert für die Inkubationszeit.

2. Die durchschnittliche Inkubationszeit ist die Zeit, zu der die Hälfte der Infektionen ausgebrochen sind

   Versuchen Sie 14 = (2 * 7) Tage als Wert für die Inkubationszeit.

3. Die maximale Inkubationszeit liegt – so weit ich googlen konnte – bei circa 12 Tagen.

   Versuchen Sie 12 Tage als Wert für die Inkubationszeit.

11. Gesamt-Infektionszahl

Um die Gesamt-Infektionszahl ab Zeitpunkt 0 zu berechnen, muss man die Lösung der konkreten IVP integrieren.

Im Fall von $x \le x_1$ or $x_2 \le x$ kann man eine Stammfunktion in "Bronstein, Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, ISBN 3-871-44492-8" finden.

Im Fall $x_1 \le x \le x_2$ muss man eine Stammfunktion numerisch berechnen. Der Algorithmus steht in "Stoer, Bulirsch, Numerische Mathematik 2, Springer-Lehrbuch, ISBN 3-540-51482-1". Er heißt "Euler'sches Polygonzug Verfahren".