Ein auffälliger Beweis

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 – 10

50670 Köln
Germany

mailto:Christian.Reinbothe@T-Online.DE
http://WWW.Reinbothe.DE

Das Problem:

Ich habe den auffälligen Beweis im folgenden Lehrbuch gefunden: „Karl Heinz Mayer, Algebraische Topologie, Birkhäuser Verlag (Basel), ISBN 3-7643-2229-2, 6.7 (Seite 59)”.

Er enthält eine doppelte Annahme (in Reihe, nicht parallel). Ich weiß nicht, wie ich den Beweis zu Ende führen soll. Vielleicht ist es sogar unmöglich und die Vorgehensweise ist einfach verboten. Ich weiß es nicht. Ich fühle mich unwohl dabei.

Die These des Theorems zu beweisen ist nicht das Problem. Es ist einfach.

Das Problem ist die doppelte Annahme.

Der einfache Beweis:

Satz

Vor. Sei X ein topologischer Raum.
Sei A eine zusammenhängende Teilmenge von X.

Beh. $\forall B \subseteq X \quad \left(A \subseteq B \subseteq \overline{A} \quad \Rightarrow \quad (B \text{ ist zusammenhängend})\right)$

Bew.: Sei $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$.
Seien $U_1, U_2 \in \mathrm{Top}(X)$ mit

$$B = (U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B)$$
$$\varnothing = (U_1 \cap B) \cap (U_2 \cap B)$$

Weil $A \subseteq B$, folgt:

$$A = (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A)$$
$$\varnothing = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A)$$

Weil A zusammenhängend ist, existiert $i \in \{1, 2\}$ mit

$$U_i \cap A = \varnothing$$

Weil $A \subseteq X$, folgt:

$$A \subseteq X \setminus U_i \tag{*}$$

Weil $U_i \in \mathrm{Top}(X)$, gilt dabei:

$$X \setminus U_i \text{ ist abgeschlossen} \tag{**}$$

Nach Definition von of $\overline{A}$ folgt mit (*) und (**):

$$\overline{A} \subseteq X \setminus U_i$$

insbesondere mit $B \subseteq \overline{A}$

$$B \subseteq X \setminus U_i$$

und schließlich

$$U_i \cap B = \varnothing$$

Der auffällige Beweis:

Satz

Vor. Sei X ein topologischer Raum.
Sei A eine zusammenhängende Teilmenge von X. (1)

Beh. $\forall B \subseteq X \quad \left(A \subseteq B \subseteq \overline{A} \quad \Rightarrow \quad (B \text{ ist zusammenhängend})\right)$

Bew.: Sei $B \subseteq X$ mit $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$.

DIE ERSTE ANNAHME: B ist nicht zusammenhängend

Dann existieren $U_1, U_2 \in \mathrm{Top}(X)$ mit

$$\begin{aligned} &B = (U_1 \cap B) \cup (U_2 \cap B) \\ &\varnothing = (U_1 \cap B) \cap (U_2 \cap B) \\ &((U_1 \cap B) \neq \varnothing) \quad \wedge \quad ((U_2 \cap B) \neq \varnothing) \end{aligned} \tag{2}$$

Weil $A \subseteq B$, folgt:

$$\begin{aligned} &A = (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) \\ &\varnothing = (U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) \end{aligned} \tag{3}$$

Weil $B \subseteq \overline{A}$, gilt das Folgende:

$$(U_1 \cap A \neq \varnothing) \quad \wedge \quad (U_2 \cap A \neq \varnothing) \tag{4}$$

DIES IST EIN WIDERSPRUCH ZU (1)!

NUN ZUM BEWEIS VON (4):

DIE ZWEITE ANNAHME: $(U_1 \cap A = \emptyset) \quad \vee \quad (U_2 \cap A = \emptyset)$

Dann existiert $i \in \{1, 2\}$ mit

$$U_i \cap A = \emptyset$$

Weil $A \subseteq X$, folgt:

$$A \subseteq X \setminus U_i \tag{5}$$

Weil $U_i \in \mathrm{Top}(X)$, gilt dabei:

$X \setminus U_i$ ist abgeschlossen (6)

Nach Definition von $\overline{A}$ folgt aus (5) und (6):

$$\overline{A} \subseteq X \setminus U_i$$

insbesondere mit $B \subseteq \overline{A}$

$$B \subseteq X \setminus U_i$$

und schließlich

$$U_i \cap B = \emptyset$$

DIES IST EIN WIDERSPRUCH ZU (2)!
EINE (ODER BEIDE?) DER ZWEI ANNAHMEN IST (SIND) FALSCH, ABER ICH KANN NICHT ENTSCHEIDEN, WELCHE. ICH BRECHE HIER AB (ICH WEISS NICHT; WIE ICH DEN BEWEIS ZU ENDE FÜHREN SOLL)!