Einige neue Stammfunktionen

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 – 10

50670 Köln
Germany

mailto:Christian.Reinbothe@T-Online.DE
http://WWW.Reinbothe.DE

1. Eine Stammfunktion von e^(α(x^m))

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Das folgende ist bekannt:

$$
\begin{aligned}
e^{\left(\alpha x^m\right)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \left(\alpha x^m\right)^i = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \left(\alpha^i x^{mi}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \alpha^i x^{mi}
\end{aligned}
$$

Also definieren wir eine Funktion $E_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$E_1\,(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \frac{\alpha^i}{mi + 1} x^{mi+1}$$

Dann gilt offenbar:

$E_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞

$E_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $e^{\left(\alpha x^m\right)}$

2. Eine Stammfunktion von e^(α(x^m)+β(x^n))

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq 0$.
Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Das folgende ist bekannt:

$$e^{\left(\alpha x^m + \beta x^n\right)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \left(\alpha x^m + \beta x^n\right)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left(\alpha x^m\right)^j \left(\beta x^n\right)^{i-j} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j x^{mj} \beta^{i-j} x^{n(i-j)} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j \beta^{i-j} x^{mj+n(i-j)} \right)$$

Also definieren wir eine Funktion $E_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$E_2(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\alpha^j \beta^{i-j}}{mj + n(i-j) + 1} x^{mj+n(i-j)+1} \right)$$

Dann gilt offenbar:

$E_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞

$E_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $e^{\left(\alpha x^m + \beta x^n\right)}$

3. Eine Stammfunktion von sin(*α*(*x*^*m*))

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Das folgende ist bekannt:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\alpha x^m\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\alpha x^m\right)^{2i+1} = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\alpha^{2i+1} x^{2mi+m}\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\,\alpha^{2i+1} x^{2mi+m}
\end{aligned}$$

Also definieren wir eine Funktion $E_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$E_3(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \frac{\alpha^{2i+1}}{2mi+m+1} x^{2mi+m+1}$$

Dann gilt offenbar:

$E_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞

$E_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\sin\left(\alpha x^m\right)$

4. Eine Stammfunktion von $\sin(\alpha(x\hat{}m)+\beta(x\hat{}n))$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq 0$.
Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Das folgende ist bekannt:

$$\sin\left(\alpha x^m + \beta x^n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\alpha x^m + \beta x^n\right)^{2i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\sum_{j=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{j}\left(\alpha x^m\right)^j \left(\beta x^n\right)^{2i+1-j}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\sum_{j=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{j}\alpha^j x^{mj} \beta^{2i+1-j} x^{2ni+n-nj}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\sum_{j=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{j}\alpha^j \beta^{2i+1-j} x^{mj+2ni+n-nj}\right)$$

Also definieren wir eine Funktion $E_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$E_4(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\left(\sum_{j=0}^{2i+1} \frac{\binom{2i+1}{j}\alpha^j \beta^{2i+1-j}}{mj+2ni+n-nj+1} x^{mj+2ni+n-nj+1}\right)$$

Dann gilt offenbar:

$E_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞

$E_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\sin\left(\alpha x^m + \beta x^n\right)$

5. Eine Stammfunktion von $\cos(\alpha(x\hat{\ }m))$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Das folgende ist bekannt:

$$\cos\left(\alpha x^m\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\left(\alpha x^m\right)^{2i} = $$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\left(\alpha^{2i} x^{2mi}\right) = $$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!}\alpha^{2i} x^{2mi}$$

Also definieren wir eine Funktion $E_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$E_5(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \frac{\alpha^{2i}}{2mi + 1} x^{2mi+1}$$

Dann gilt offenbar:

$E_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞

$E_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\cos\left(\alpha x^m\right)$

6. Eine Stammfunktion von $\cos(\alpha(x\hat{}m)+\beta(x\hat{}n))$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq 0$.
Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Das folgende ist bekannt:

$$\cos\left(\alpha x^m + \beta x^n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left(\alpha x^m + \beta x^n\right)^{2i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left(\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} \left(\alpha x^m\right)^j \left(\beta x^n\right)^{2i-j} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left(\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} \alpha^j x^{mj} \beta^{2i-j} x^{2ni-nj} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left(\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} \alpha^j \beta^{2i-j} x^{mj+2ni-nj} \right)$$

Also definieren wir eine Funktion $E_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$E_6(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} \left(\sum_{j=0}^{2i} \frac{\binom{2i}{j} \alpha^j \beta^{2i-j}}{mj + 2ni - nj + 1} x^{mj+2ni-nj+1} \right)$$

Dann gilt offenbar:

$E_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist C^∞

$E_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $\cos\left(\alpha x^m + \beta x^n\right)$

7. Mehr Stammfunktionen mit sinh und cosh

Dasw folgende ist bekannt:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

In diesen Fällen können wir 1. und 2. anwenden.

8. Mehr Stammfunktionen mit tan und tanh

Nach "Bronstein" (ISBN: 3 87144 492 8) ist bekannt:

$$\tan(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}\left(2^{2i} - 1\right) B_i}{(2i)!} x^{2i-1} \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cot(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2i} B_i}{(2i)!} x^{2i-1} \qquad \left(0 < |x| < \pi\right)$$

$$\tanh(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}\, 2^{2i}\left(2^{2i} - 1\right) B_i}{(2i)!} x^{2i-1} \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\coth(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}\, 2^{2i} B_i}{(2i)!} x^{2i-1} \qquad \left(0 < |x| < \pi\right)$$

$\left(B_i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ sind die Bernoulli-Zahlen

Cave!: Bitte verifizieren Sie die obigen Potenzreihen!

Damit erhalten Sie neue Stammfunktionen von tan und tanh, **aber nicht von cot und coth.**

9. Beobachtung 1

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.
Dann existiert $\rho \in [0; \infty]$ und eine Potenzreihe $f :]-\rho; \rho[\to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$$f :]-\rho; \rho[\to \mathbb{R} \text{ ist } C^{\infty}$$

Dann gilt:

$$f\left(\alpha x^m\right) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\alpha x^m\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \alpha^i x^{mi}$$

Dann existieren $\tilde{\rho} \in [0; \infty]$ und eine Potenzreihe $\tilde{f} :]-\tilde{\rho}; \tilde{\rho}[\to \mathbb{R}$ mit:

$$\rho < \infty \Rightarrow \tilde{\rho} \geq \left(\frac{\rho}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\tilde{f}(x) = f\left(\alpha x^m\right)$$

$$\tilde{f} :]-\tilde{\rho}; \tilde{\rho}[\to \mathbb{R} \text{ ist } C^{\infty}$$

Also definieren wir eine Funktion $\tilde{F}_1 :]-\tilde{\rho}; \tilde{\rho}[\to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{F}_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i \alpha^i}{mi + 1} x^{mi+1}$$

Dann gilt offenbar:

$$\tilde{F}_1 :]-\tilde{\rho}; \tilde{\rho}[\to \mathbb{R} \text{ ist eine Potenzreihe}$$

$$\tilde{F}_1 :]-\tilde{\rho}; \tilde{\rho}[\to \mathbb{R} \text{ ist } C^{\infty}$$

$$\tilde{F}_1 :]-\tilde{\rho}; \tilde{\rho}[\to \mathbb{R} \text{ ist eine Stammfunktion von } f\left(\alpha x^m\right)$$

10. Beobachtung 2

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \neq 0$.
Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq 0$.
Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Sei $\left(a_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.
Dann existieren $\rho \in [0;\infty]$ und eine Potenzreihe $f :]-\rho;\rho[\to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

$f :]-\rho;\rho[\to \mathbb{R}$ ist C^∞

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\alpha x^m + \beta x^n\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\alpha x^m + \beta x^n\right)^i = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \left(\alpha x^m\right)^j \left(\beta x^n\right)^{i-j}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j x^{mj} \beta^{i-j} x^{n(i-j)}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \alpha^j \beta^{i-j} x^{mj+n(i-j)}\right) \end{aligned}$$

Dann existieren $\tilde{\rho} \in [0;\infty]$ und eine Potenzreihe $\tilde{f} :]-\tilde{\rho};\tilde{\rho}[\to \mathbb{R}$ mit:

$$\tilde{\rho} = \sup\left\{r \in \mathbb{R} : \left|\alpha r^m + \beta r^n\right| \leq \rho\right\}$$

$$\tilde{f}(x) = f\left(\alpha x^m + \beta x^n\right)$$

$\tilde{f} :]-\tilde{\rho};\tilde{\rho}[\to \mathbb{R}$ ist C^∞

Also definieren wir eine Funktion $\widetilde{F}_2 : \left]-\widetilde{\rho}; \widetilde{\rho}\right[\to \mathbb{R}$ durch

$$\widetilde{F}_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\alpha^j \beta^{i-j}}{mj + n(i-j) + 1} x^{mj+n(i-j)+1} \right)$$

Dann gilt offenbar:

$\widetilde{F}_2 : \left]-\widetilde{\rho}; \widetilde{\rho}\right[\to \mathbb{R}$ ist eine Potenzreihe

$\widetilde{F}_2 : \left]-\widetilde{\rho}; \widetilde{\rho}\right[\to \mathbb{R}$ ist C^∞

$\widetilde{F}_2 : \left]-\widetilde{\rho}; \widetilde{\rho}\right[\to \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von $f\left(\alpha x^m + \beta x^n\right)$