1. Auszüge aus der axiomatischen Mengenlehre (ZFC) (verallgemeinert)

1.1. Generelle Voraussetzungen

Wir betrachten einen Bereich $\mathfrak{M}$ von Objekten, die wir „Mengen“ nennen. Im weiteren Kontext bezeichne jedes Symbol A, B, M, X, Y und Z eine Menge.

Auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ sei eine zweistellige Aussageform vorgegeben, die wir mit α bezeichnen, d. h. für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X\alpha Y$ gilt oder ob $X\alpha Y$ nicht gilt (d. h. $X \not\alpha Y$ gilt). Des Weiteren gelte

$$\left(\forall A,B \quad \left(A\alpha B \quad \Leftrightarrow \quad A \in B\right)\right) \quad \vee \quad \left(\forall A,B \quad \left(A\alpha B \quad \Leftrightarrow \quad A \notin B\right)\right)$$

Ferner sei auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ eine weitere zweistellige Aussageform vorgegeben, die wir mit = bezeichnen, d. h. für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X = Y$ gilt oder ob $X = Y$ nicht gilt (d. h. $X \neq Y$ gilt). Zusätzlich dazu habe = die folgenden Eigenschaften:

1. $\forall X \quad X = X$
2. $\forall X,Y \quad \left(X = Y \quad \Rightarrow \quad Y = X\right)$
3. $\forall X,Y,Z \quad \left(\left(X = Y \quad \wedge \quad Y = Z\right) \quad \Rightarrow \quad X = Z\right)$
4. $\forall X,Y,Z \quad \left(\left(X = Y \quad \wedge \quad X\alpha Z\right) \quad \Rightarrow \quad Y\alpha Z\right)$

Hieraus folgt insbesondere:

5. $\forall X,Y,Z \quad \left(\left(X = Y \quad \wedge \quad X \not\alpha Z\right) \quad \Rightarrow \quad Y \not\alpha Z\right)$

1.2. Existenz-Axiom

Axiom:

Beh.: Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \not\alpha M$$

1.3. Extensions-Axiom

Axiom:

Beh.: Für alle Mengen A, B gilt:

$$\left(\forall X \quad \left(X \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X \alpha B\right)\right) \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Bem.:

1. Nach 1.1. gilt sogar:

   $$\left(\forall X \quad \left(X \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X \alpha B\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

2. Weiterhin gilt:

   $$\left(\forall X \quad \left(X \alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X \alpha B\right)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall X \quad \left(X \not\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X \not\alpha B\right)\right)$$

3. Mit Hilfe des Existenz-Axioms und des Extensions-Axioms läßt sich zeigen:

   Es existiert genau eine Menge M mit der Eigenschaft

   $$\forall X \quad X \not\alpha M$$

1.4. Axiomen-Schema der Komprehension (veraltet)

Axiom:

Vor.: Sei $P(\ldots)$ eine einstellige Aussageform auf $\mathfrak{M}$, d. h. für jede Menge X stehe fest ob $P(X)$ gilt oder ob $P(X)$ nicht gilt (d. h. $\neg(P(X))$ gilt).

Beh.: Es existiert (mindestens) eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \quad (X \alpha B \quad \Leftrightarrow \quad P(X))$$

Bem.:

Bem.:

1. Mit Hilfe des Axiomen-Schemas der Komprehension und des Extensions-Axioms läßt sich zeigen:

   Es existiert genau eine Menge B mit der Eigenschaft:

   $$\forall X \quad (X \alpha B \quad \Leftrightarrow \quad P(X))$$

   Für dieses B schreibt man auch $\{P(X)\}_{\alpha}$.

2. „Russelsche Antinomie":

   Nach diesem Axiom wäre $\{X \not\alpha X\}_{\alpha}$ eine Menge. Nach Russel führt das auf einen Widerspruch.

1.5. Axiomen-Schema der Komprehension (aktuell)

Axiom:

Vor.: Sei $P(\ldots)$ eine einstellige Aussageform auf $\mathfrak{M}$, d. h. für jede Menge X stehe fest ob $P(X)$ gilt oder ob $P(X)$ nicht gilt (d. h. $\neg(P(X))$ gilt).

Beh.: Zu jeder Menge A existiert (mindestens) eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \quad \left(X \alpha B \quad \Leftrightarrow \quad \left(X \alpha A \quad \wedge \quad P(X)\right)\right)$$

Bem.: Mit Hilfe des Axiomen-Schemas der Komprehension und des Extensions-Axioms läßt sich zeigen:

Zu jeder Menge A existiert genau eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \quad \left(X \alpha B \quad \Leftrightarrow \quad \left(X \alpha A \quad \wedge \quad P(X)\right)\right)$$

Für dieses B schreibt man auch $\{X \alpha A:\ P(X)\}_{\alpha}$.

1.6. Theorem

Theorem:

Beh.: Es existiert keine Menge M mit der Eigenschaft

$\forall X \quad X \alpha M$

Bew.:

Ann.: Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \alpha M \tag{1}$$

Da M eine Menge ist, gilt nach dem Axiomen-Schema der Komprehension (Cave! $P(X) := X \not\alpha X$ definiert nach der Generalvoraussetzung eine einstellige Aussageform):

$$A := \left\{ X \alpha M : \; X \not\alpha X \right\}_{\alpha} \text{ ist eine Menge} \tag{2}$$

Nach (1) und (2) folgt dann:

$$A \alpha M \tag{3}$$

Schließlich gilt noch:

$$A \alpha A \text{ oder } A \not\alpha A \tag{4}$$

1. Fall: Es gilt $A \alpha A$.

Dann folgt nach Definition von A:

$$A \not\alpha A$$

Widerspruch!

2. Fall: Es gilt $A \not\alpha A$.

Dann folgt nach (3) und Definition von A:

$$A \alpha A$$

Widerspruch!

2. Fazit

Wenn das α aus Kapitel 1 die Eigenschaft $\forall A,B\ \left(A\alpha B \quad \Leftrightarrow \quad A\in B\right)$ hat, so erhält man:

1. Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

   $\forall X \quad X \notin M$

2. Es existiert keine Menge M mit der Eigenschaft

   $\forall X \quad X \in M$

Wenn das α aus Kapitel 1 die Eigenschaft $\forall A,B\ \left(A\alpha B \quad \Leftrightarrow \quad A\notin B\right)$ hat, so erhält man:

3. Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

   $\forall X \quad X \in M$

4. Es existiert keine Menge M mit der Eigenschaft

   $\forall X \quad X \notin M$

Die drei Axiome aus Kapitel 1 sind miteinander unvereinbar.

3. Weitere Überlegungen

3.1. Alternative Mengenlehre

Durch die Betrachtung von 1. und 2. kommt man zu dem Schluß, daß man zusätzlich zu ZFC eine weitere Mengenlehre $\notin$ −ZFC (die sich von ZFC unterscheidet) erhält, indem man in den Axiomen von ZFC jedes Vorkommen von $\in$ durch $\notin$ und jedes Vorkommen von $\notin$ durch $\in$ ersetzt. Diese Mengenlehre $\notin$ −ZFC ist zu ZFC dual und gleichzeitig mit ihr widerspruchsfrei oder nicht widerspruchsfrei.

Die Standard-Mengenlehre ZFC ist dadurch charakterisiert, daß man eine Menge *M* erhält, indem man von der leeren Menge ausgeht und die Elemente von *M* dazu addiert. Genauer gesagt heißt das:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ \forall A_1,\ldots,A_n \ \ \forall X \ \left(X \in \left\{ A_1,\ldots,A_n \right\}_{\in} \ \ \Leftrightarrow \ \ \left(X = A_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ X = A_n \right) \right)$$

Die Mengenlehre $\notin$ −ZFC ist dadurch charakterisiert, daß man eine Menge *M* erhält, indem man von der Menge aller Mengen ausgeht und die Nicht-Elemente von *M* davon abzieht. Genauer gesagt heißt das:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ \forall A_1,\ldots,A_n \ \ \forall X \ \left(X \notin \left\{ A_1,\ldots,A_n \right\}_{\notin} \ \ \Leftrightarrow \ \ \left(X = A_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ X = A_n \right) \right)$$

bzw.

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \ \ \forall A_1,\ldots,A_n \ \ \forall X \ \left(X \in \left\{ A_1,\ldots,A_n \right\}_{\notin} \ \ \Leftrightarrow \ \ \left(X \neq A_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ X \neq A_n \right) \right)$$

3.2. Mengen-„Monster“

Die Überlegungen aus 3.1. führen zu dem Schluß, daß die leere Menge genauso ein Mengen-„Monster“ ist, wie die Menge aller Mengen.

3.3. ZFC ist nicht „kanonisch“

Weil die Axiome von ZFC (geschrieben mit α wie in 1.) nur $\alpha = \neg\not\alpha$ und $\not\alpha = \neg\alpha$ benutzen, sind ZFC und $\notin$ −ZFC offenbar beide zusammen gültig oder zusammen nicht gültig. Vorausgesetzt, ZFC ist gültig, ist ZFC (und damit natürlich auch $\notin$ −ZFC) **nicht „kanonisch“**.

3.4. ZFC ist nicht gültig

Vorausgesetzt, ZFC ist gültig, ist auch $\notin$ −ZFC gültig. Dann folgt wie in 2., daß die ersten 3 Axiome von ZFC (wie in 1.) miteinander unvereinbar sind.

3.5. völlig fremde Sprache

Wenn das Kapitel 1. in einer völlig fremden Sprache geschrieben wäre, so wären die dort definierten beiden Varianten ZFC und $\notin$ −ZFC ununterscheidbar.

4. Literaturverzeichnis

[1] Vorlesungen über Mathematik 1987 - 2002
Universität zu Köln