Eine Modifikation der Euler'schen Polygonzug-Methode

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 – 10

50670 Köln
Germany

mailto:Christian.Reinbothe@T-Online.DE
http://WWW.Reinbothe.DE

Euler'sche Polygonzug Methode:

Sei $t_0 \in \mathbb{R}$.
Sei $b \in \mathbb{R}$ mit $t_0 < b$.
Sei M eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $M \neq \emptyset$.
Sei $f : M \times \left[t_0, b\right] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Sei $\eta \in M$.
Sei $h \in \mathbb{R}_+$.

Wir betrachten die "Anfangs-Wert-Aufgabe":

$$y' = f(y, t)$$
$$y\left(t_0\right) = \eta$$

Mit der folgenden Rekursion erhaelt man eine Naeherungsloesung fuer diese AWA

$$y_{i+1} := y_i + hf\left(y_i, t_i\right)$$
$$t_{i+1} := t_i + h$$

Diese Rekursion heisst "Euler'sche Polygonzug-Methode". Sie ist bekannt und kann in "Stoer, Bulirsch: Numerische Mathematik 2, Springer-Lehrbuch" gefunden werden.

Fuer die Anzahl $n \in \mathbb{N}_0$ der Schritte in dieser Methode gilt:

$$n \leq \text{FLOOR}\left(\frac{\left(b - t_0\right)}{h}\right)$$

Modifikation:

Wir betrachten das folgende Beispiel $f : \mathbb{R} \times \left[t_0, b\right] \rightarrow \mathbb{R}$ wobei $b \rightarrow 1,\ b < 1$:

$$\forall t \in \left[t_0, b\right] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f\left(y, t\right) := \sin\left(\frac{1}{1 - t}\right)$$

Um fuer dieses Beispiel vernuenftige Ergebnisse zu erzielen, muss man $h \in \mathbb{R}_+$ an f anpassen. Mein Vorschlag ist:

$$t_{i+1} := t_i + \frac{h}{\sqrt{1 + \left(f\left(y_i, t_i\right)\right)^2}}$$

$$y_{i+1} := y_i + \left(t_{i+1} - t_i\right) f\left(y_i, t_i\right)$$

Die Anzahle der Schritte in dieser Methode haengt von $b,\ t_0,\ h$ and f ab.

Cave: Auf Endlosschleife pruefen!

Erklaerung:

Mein Vorschlag ist das Resultat des Versuchs, die Rekursion mit Bogenlaenge = 1 zu durchlaufen. Fuer alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und alle stetig differenzierbare Abbildung $g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] \quad \left(\left(t_1 \leq t_2\right) \Rightarrow \left(\mathrm{ArcLength}\left(g \left\|\left[t_1, t_2\right]\right.\right) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(g'(\tau)\right)^2}\ \mathrm{d}\tau\right)\right)$$

Diese Formel kann in “Bronstein, Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main)” gefunden werden.

Diskussion:

Das Beispiel $f : \mathbb{R} \times [t_0, b] \to \mathbb{R}$ hat eine wichtige Eigenschaft:

$$\forall t \in [t_0, b] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left(f(y,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (t \text{ ist irrational})\right)$$

Wenn Sie also auf Ihrem Computer $f(y,t) = 0$ erhalten, haben Sie einen Rundungsfehler gemacht! Das bedeutet insbesondere:

$$\frac{h}{\sqrt{1 + \left(f\left(y_i, t_i\right)\right)^2}} < h \text{ (in the new polygonal method for } f\text{)}$$

Die neue Methode ist genauer als die Euler'sche Polygonzug-Methode.