Eine Stammfunktion

von $x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$

$$\left(\alpha, \beta > 0\right)$$

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 - 10
50670 Köln
Germany
http://WWW.Reinbothe.DE

1. Hilfsmittel

Def.: Sei J ein nicht leeres Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Wir definieren dann:

1. $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn
   $\forall x, y \in J \quad \forall t \in [0;1] \quad \phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$

2. Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
   $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex genau dann, wenn
   $\ln(\phi) : J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Bem.: Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend ist, folgt:

$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex$) \Rightarrow$
$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$)$

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung.

Beh.: $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$) \Leftrightarrow$
$(\phi' : J \to \mathbb{R}$ ist monoton steigend$)$

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Abbildung.

Beh.: $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$) \Leftrightarrow$
$\phi'' \geq 0$

2. Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ durch das absolut konvergente Integral

$$\Gamma(\alpha) := \underbrace{\int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau} \, d\tau}_{>0}$$

definiert und es gilt:

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist analytisch} \tag{1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \tag{2}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Gamma(k + 1) = k! \tag{3}$$

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist logarithmisch konvex (also auch konvex)} \tag{4}$$

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(2) = 1 \tag{5}$$

Mit (4) und (5) folgt offenbar:

$$\Gamma \mid [2; \infty[\text{ ist monoton steigend} \tag{6}$$

3. Idee

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.
Wir definieren nun eine Funktion $\gamma : \left]-1;\infty\right[\to \mathbb{R}$ durch

$$\forall u \in \left]-1;\infty\right[\quad \gamma(u) := \Gamma(u+1)$$

Dann folgt mit (2):

$$\forall v \in \left]-1;\infty\right[\quad \gamma(v+1) = (v+1)\,\gamma(v) \tag{7}$$

Außerdem folgt mit (6):

$$\gamma \mid \left[1;\infty\right[\text{ ist monoton steigend} \tag{8}$$

Weiter definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$f_\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha} = x^{\alpha} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n} \right) \tag{9}$$

Dabei gilt wegen (3) und (8) für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} \left| \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot t^{n} \right| &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot |t|^{n} \leq \\
&\leq \frac{1}{\gamma(\alpha)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\gamma(n)} \cdot |t|^{n} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\Gamma(n+1)} \cdot |t|^{n} = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n\,!} \cdot |t|^{n} \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n\,!} \cdot |t|^{n} \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + e^{|t|}
\end{aligned}$$

Daher definiert (9) eine differenzierbare Funktion und wegen (2), (7) und (9) gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$:

$$\left(f_\alpha\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha}\right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot \left(x^{n+\alpha}\right)' =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha)}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha-1} =$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\alpha)}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha-1} =$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\alpha+1)}{\gamma(n+\alpha+1)} \cdot x^{n+\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \cdot x^{n+\alpha} =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot x^{\alpha-1} + f_\alpha =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} + f_\alpha$$

Damit ist gezeigt:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \left(\begin{array}{l} f_\alpha \text{ ist differenzierbar und} \\ \text{genügt der gewöhnlichen} \\ \text{linearen Differentialgleichung} \\ \left(y_\alpha\right)' - y_\alpha = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \text{ auf } \mathbb{R}_+ \end{array}\right) \tag{10}$$

4. Lösung der DGL

Nach [2] gilt der folgende Satz:

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $g : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Sei $h : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Sei $\xi \in J$.
Sei $\eta \in \mathbb{R}$.

Beh.: Das Anfangswertproblem

$$y' + g(t)\, y = h(t) \qquad y(\xi) = \eta \qquad t \in J \tag{11}$$

hat genau eine Lösung. Sie existiert in ganz J.

Bem.: Sei die Funktion $G : J \to \mathbb{R}$ die Stammfunktion von $g : J \to \mathbb{R}$ mit $G(\xi) = 0$, d. h.

$$\forall t \in J \qquad G(t) = \int_{\xi}^{t} g(\tau)\, d\tau$$

Dann hat die Lösung des obigen Anfangswertproblems die folgende Gestalt:

$$\forall t \in J \qquad y(t) = e^{-G(t)} \cdot \left(\eta + \int_{\xi}^{t} h(\tau) \cdot e^{G(\tau)}\, d\tau \right) \tag{12}$$

5. Anwendung des vorherigen Satzes

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.

Im konkreten Fall des Abschnitts 3. ist $J = \mathbb{R}_+$ und die Funktionen $g : J \to \mathbb{R}$ und $h : J \to \mathbb{R}$ sind definiert durch

$$\forall t \in J \quad g(t) := -1$$

$$\forall t \in J \quad h(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot t^{\alpha - 1}$$

Wir definieren nun eine Abbildung $T_\alpha : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall t \in J \quad T_\alpha(t) := \Gamma(\alpha) \cdot f_\alpha(t) \cdot e^{-t} \tag{13}$$

Wir zeigen schließlich:

T_α ist eine Stammfunktion von $x^{\alpha-1} \cdot e^{-x}$ auf $\mathbb{R}_+$

bzw.

$$\forall t, \xi \in J \quad T_\alpha(t) - T_\alpha(\xi) = \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau} \, d\tau \tag{14}$$

Beweis von (14):
Sei $\xi \in J$. Dann folgt für Stammfunktion $G : J \to \mathbb{R}$ von $g : J \to \mathbb{R}$ mit $G(\xi) = 0$:

$$\forall t \in J \quad G(t) = \int_{\xi}^{t} g(\tau)\, d\tau = \xi - t$$

Da f_α nach (10) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + g(t)\, y = h(t) \qquad y(\xi) = f_\alpha(\xi) \qquad t \in J$$

ist, folgt mittels des Satzes aus Abschnitt 4. und insbesondere (12) für alle $t \in J$:

$$f_\alpha(t) = e^{t-\xi} \cdot \left(f_\alpha(\xi) + \int_{\xi}^{t} h(\tau) \cdot e^{\xi-\tau}\, d\tau \right) =$$

$$= e^{t} \cdot \left(f_\alpha(\xi) \cdot e^{-\xi} + \int_{\xi}^{t} h(\tau) \cdot e^{-\tau}\, d\tau \right) =$$

$$= e^{t} \cdot \left(f_\alpha(\xi) \cdot e^{-\xi} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^{t} \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau}\, d\tau \right)$$

Dies lässt sich schließlich umformen:

$$\forall t \in J \quad \Gamma(\alpha) \cdot \left(f_\alpha(t) \cdot e^{-t} - f_\alpha(\xi) \cdot e^{-\xi} \right) = \int_{\xi}^{t} \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau}\, d\tau$$

bzw.

$$\forall t \in J \quad T_\alpha(t) - T_\alpha(\xi) = \int_{\xi}^{t} \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau}\, d\tau$$

Damit ist (14) gezeigt.

6. Grenzübergang

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.

Wegen (9) gilt offenbar:

$f_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist stetig fortsetzbar in 0 und

$$\lim_{\xi \to 0+} f_\alpha(\xi) = 0$$

Dann folgt mit (13):

$T_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist stetig fortsetzbar in 0 und

$$\lim_{\xi \to 0+} T_\alpha(\xi) = 0$$

Daher folgt nach (14):

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau}\, d\tau \text{ konvergiert für } (\xi \to 0+)$$

und

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad T_\alpha(t) = \lim_{\xi \to 0+} \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau}\, d\tau = \int_0^t \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau}\, d\tau$$

und

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{t \to \infty} T_\alpha(t)$$

Man erhält eine Stammfunktion von $x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}$ durch die Substitution $\tau \mapsto \beta\tau$ $\left(\beta \in \mathbb{R}_+\right)$.

7. Literaturverzeichnis

[1] Jürgen Neukirch, „Algebraische Zahlentheorie"
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[2] Wolfgang Walter, „Gewöhnliche Differentialgleichungen"
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[3] Bronstein – Semendjajew „Taschenbuch der Mathematik"
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main)

[4] www.Wikipedia.org

[5] N. N. Lebedev, „Special Functions & Their Applications"
Dover Publications, Inc., New York

[6] Milton Abramowitz and Irene Stegun
„Handbook of Mathematical Functions"
Dover Publications, Inc., New York