1. Hilfsmittel

Def.: Sei J ein nicht leeres Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Wir definieren dann:

1. $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn
   $\forall x, y \in J \quad \forall t \in [0; 1] \quad \phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$

2. Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
   $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex genau dann, wenn
   $\ln(\phi) : J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Bem.: Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend ist, folgt:

$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex$) \Rightarrow$
$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$)$

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung.

Beh.: $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$) \Leftrightarrow$
$(\phi' : J \to \mathbb{R}$ ist monoton steigend$)$

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Abbildung.

Beh.: $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$) \Leftrightarrow$
$\phi'' \geq 0$

2. Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ durch das absolut konvergente Integral

$$\Gamma(\alpha) := \underbrace{\int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau} \, d\tau}_{>0}$$

definiert und es gilt:

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist analytisch} \tag{1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \tag{2}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Gamma(k + 1) = k! \tag{3}$$

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist logarithmisch konvex (also auch konvex)} \tag{4}$$

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(2) = 1 \tag{5}$$

Mit (4) und (5) folgt offenbar:

$$\Gamma \mid [2; \infty[\text{ ist monoton steigend} \tag{6}$$

Wir definieren nun eine Funktion $\gamma :]-1; \infty[\to \mathbb{R}$ durch

$$\forall u \in]-1; \infty[\quad \gamma(u) := \Gamma(u + 1)$$

Dann folgt mit (2):

$$\forall v \in]-1; \infty[\quad \gamma(v + 1) = (v + 1)\, \gamma(v) \tag{7}$$

Außerdem folgt mit (6):

$$\gamma \mid [1; \infty[\text{ ist monoton steigend} \tag{8}$$

3. Betrachtung der sin-Funktion

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.
Nach Analysis gilt:

$$\begin{aligned}
\sin|\mathbb{R}_+ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{i-1}{2}\right)} \frac{x^i}{i!}
\end{aligned}$$

Weiter definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ die Funktion $s_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned}
s_\alpha &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1+\alpha}}{\gamma(2n+1+\alpha)} = \\
&= x^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{\gamma(2n+1+\alpha)} \right) = \qquad (9) \\
&= \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ ungerade}}}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{i-1}{2}\right)} \frac{x^{i+\alpha}}{\gamma(i+\alpha)}
\end{aligned}$$

Dann folgt nach dem Satz über den Konvergenzradius:

$$s_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist wohldefiniert und differenzierbar} \qquad (10)$$

4. Betrachtung der cos-Funktion

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.
Nach Analysis gilt:

$$\cos \mid \mathbb{R}_+ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{i}{2}\right)} \frac{x^i}{i!}$$

Weiter definieren wir für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ die Funktion $c_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$c_\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\alpha}}{\gamma(2n+\alpha)} =$$

$$= x^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{\gamma(2n+\alpha)} \right) = \tag{11}$$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{i}{2}\right)} \frac{x^{i+\alpha}}{\gamma(i+\alpha)}$$

Dann folgt nach dem Satz über den Konvergenzradius:

$c_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert und differenzierbar (12)

5. Differenzieren

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.

Dann folgt mit (2) und (7):

$$
\begin{aligned}
\left(s_\alpha\right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x^{2n+1+\alpha}\right)'}{\gamma\left(2n+1+\alpha\right)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(2n+1+\alpha\right)}{\gamma\left(2n+1+\alpha\right)} x^{2n+\alpha} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\alpha}}{\gamma\left(2n+\alpha\right)} = \\
&= c_\alpha
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\left(c_\alpha\right)' &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(x^{2n+\alpha}\right)'}{\gamma\left(2n+\alpha\right)} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(2n+\alpha\right)}{\gamma\left(2n+\alpha\right)} x^{2n-1+\alpha} = \\
&= \frac{\alpha}{\gamma\left(\alpha\right)} x^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(2n+\alpha\right)}{\gamma\left(2n+\alpha\right)} x^{2n-1+\alpha} = \\
&= \frac{\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} x^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1+\alpha}}{\gamma\left(2n-1+\alpha\right)} = \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} x^{\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1+\alpha}}{\gamma\left(2n+1+\alpha\right)} = \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1+\alpha}}{\gamma\left(2n+1+\alpha\right)} = \\
&= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)} - s_\alpha
\end{aligned}
$$

6. Aufstellung der DGL

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.
Es gilt:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \begin{pmatrix} s_\alpha \\ c_\alpha \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \left(s_\alpha\right)' \\ \left(c_\alpha\right)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\alpha \\ -s_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{pmatrix}$$

d. h.

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \left(\begin{array}{l} \begin{pmatrix} s_\alpha \\ c_\alpha \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung der} \\ \text{gewöhnlichen linearen DGL} \\ y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{pmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}_+ \end{array} \right) \tag{13}$$

7. Lösung der DGL

Nach [2] gilt der folgende Satz:

Satz:

Vor.: Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $A : J \to \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine stetige Funktion.
Sei $b : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.
Sei $\xi \in J$.
Sei $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Beh.: Das Anfangswertproblem

$$y' = A(t)\, y + b(t) \qquad y(\xi) = \eta \qquad t \in J \tag{14}$$

hat genau eine Lösung. Sie existiert in ganz J.

Bem.: Nach [2] existiert ein Hauptsystem $X : J \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ der homogenen DGL $y' = A(t)\, y$ mit $X(\xi) = E_n$. Dann hat die Lösung des obigen Anfangswertproblems die folgende Gestalt:

$$\forall t \in J \qquad y(t) = X(t)\left(\eta + \int_{\xi}^{t} (X(\tau))^{-1}\, b(\tau)\, d\tau\right) \tag{15}$$

8. Anwendung des vorherigen Satzes

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.

Im konkreten Fall des Abschnitts 6. ist $J = \mathbb{R}_+$, $n = 2$ und die Funktionen $A : J \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $b : J \to \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\forall t \in J \quad A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall t \in J \quad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{pmatrix}$$

Wir definieren nun 2 differenzierbare Funktionen $f : J \to \mathbb{R}^2$ und $g : J \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\forall t \in J \quad f(t) := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\forall t \in J \quad g(t) := \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\forall t \in J \quad f'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot f(t)$$

$$\forall t \in J \quad g'(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot g(t)$$

d. h.

$$\begin{pmatrix} f : J \to \mathbb{R}^2 \text{ und } g : J \to \mathbb{R}^2 \text{ sind Lösungen} \\ \text{der homogenen DGL } y' = A(t)\, y \end{pmatrix} \tag{16}$$

Wir definieren dann eine Funktion $H : J \to \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ durch

$$\forall t \in J \quad H(t) := \begin{pmatrix} f(t) & g(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \tag{17}$$

Diese Funktion hat wegen (16) und (17) die Eigenschaften:

$$\forall t \in J \quad \det\big(H(t)\big) = \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \neq 0 \tag{18}$$

$$\forall t \in J \quad H(t) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \tag{19}$$

$$\forall t \in J \quad \big(H(t)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} H : J \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ ist ein Hauptsystem} \\ \text{der homogenen DGL } y' = A(t)\, y \end{pmatrix} \tag{21}$$

Wir definieren nun eine Abbildung $T_\alpha : J \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} \forall t \in J \quad T_\alpha(t) &:= \Gamma(\alpha) \cdot \big(H(t)\big)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} s_\alpha(t) \\ c_\alpha(t) \end{pmatrix} = \\ &= \Gamma(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_\alpha(t) \\ c_\alpha(t) \end{pmatrix} = \\ &= \Gamma(\alpha) \begin{pmatrix} s_\alpha(t)\sin(t) + c_\alpha(t)\cos(t) \\ -s_\alpha(t)\cos(t) + c_\alpha(t)\sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

Wir zeigen schließlich:

$$T_\alpha \text{ ist eine Stammfunktion von } x^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}_+$$

bzw.

$$\forall t, \xi \in J \quad T_\alpha(t) - T_\alpha(\xi) = \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau \tag{23}$$

Beweis von (23):
Sei $\xi \in J$.
Wir definieren dann weiter eine Funktion $X : J \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ durch

$$\forall t \in J \quad X(t) := H(t) \cdot (H(\xi))^{-1}$$

Da $(H(\xi))^{-1}$ konstant und regulär ist, gilt nach (21) und [2]:

$$\left(\begin{array}{l} X : J \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ ist ein Hauptsystem} \\ \text{der homogenen DGL } y' = A(t)\,y \\ \text{und es gilt: } X(\xi) = E_2 \end{array}\right)$$

Da $\begin{pmatrix} s_\alpha \\ c_\alpha \end{pmatrix}$ nach (13) eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(t)\,y + b(t) \qquad y(\xi) = \begin{pmatrix} s_\alpha(\xi) \\ c_\alpha(\xi) \end{pmatrix} \qquad t \in J$$

ist, folgt mittels des Satzes aus Abschnitt 7. und insbesondere (15) für alle $t \in J$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s_\alpha(t) \\ c_\alpha(t) \end{pmatrix} &= X(t)\left(\begin{pmatrix} s_\alpha(\xi) \\ c_\alpha(\xi) \end{pmatrix} + \int_\xi^t (X(\tau))^{-1}\, b(\tau)\, d\tau\right) = \\ &= H(t)\,(H(\xi))^{-1}\left(\begin{pmatrix} s_\alpha(\xi) \\ c_\alpha(\xi) \end{pmatrix} + \int_\xi^t \left(H(\tau)\,(H(\xi))^{-1}\right)^{-1} b(\tau)\, d\tau\right) = \\ &= H(t)\,(H(\xi))^{-1}\left(\begin{pmatrix} s_\alpha(\xi) \\ c_\alpha(\xi) \end{pmatrix} + \int_\xi^t H(\xi)\,(H(\tau))^{-1}\, b(\tau)\, d\tau\right) = \\ &= H(t)\left((H(\xi))^{-1}\begin{pmatrix} s_\alpha(\xi) \\ c_\alpha(\xi) \end{pmatrix} + \int_\xi^t (H(\tau))^{-1}\, b(\tau)\, d\tau\right) \end{aligned}$$

Dabei gilt für alle $t \in J$:

$$\left(H(t)\right)^{-1} b(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t^{\alpha-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Dann kann man schließlich umformen

$$\forall t \in J \quad \Gamma(\alpha) \left(\left(H(t)\right)^{-1} \begin{pmatrix} s_\alpha(t) \\ c_\alpha(t) \end{pmatrix} - \left(H(\xi)\right)^{-1} \begin{pmatrix} s_\alpha(\xi) \\ c_\alpha(\xi) \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

bzw.

$$\forall t \in J \quad T_\alpha(t) - T_\alpha(\xi) = \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

Damit ist (23) gezeigt.

9. Grenzübergang

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
Wegen (9) und (11) gilt offenbar:

$$\begin{pmatrix} s_\alpha \\ c_\alpha \end{pmatrix} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \text{ ist stetig fortsetzbar in 0 und}$$

$$\lim_{\xi \to 0+} \begin{pmatrix} s_\alpha(\xi) \\ c_\alpha(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann folgt mit (22) offenbar:

$$T_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^2 \text{ ist stetig fortsetzbar in 0 und}$$

$$\lim_{\xi \to 0+} T_\alpha(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daher folgt mit (23):

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau \text{ konvergiert für } (\xi \to 0+)$$

und

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad T_\alpha(t) = \lim_{\xi \to 0+} \int_\xi^t \tau^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \int_0^t \tau^{\alpha-1} \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

10. Fazit

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_+$.
Gelte $x = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_+$.
Dann gilt also:

$\Gamma(\alpha)\left(s_\alpha(x)\sin(x) + c_\alpha(x)\cos(x)\right)$ ist eine Stammfunktion von $x^{\alpha-1}\cos(x)$ auf $\mathbb{R}_+$ und es gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha)\left(s_\alpha(t)\sin(t) + c_\alpha(t)\cos(t)\right) = \int_0^t \tau^{\alpha-1}\cos(\tau)\,d\tau$$

und

$\Gamma(\alpha)\left(-s_\alpha(x)\cos(x) + c_\alpha(x)\sin(x)\right)$ ist eine Stammfunktion von $x^{\alpha-1}\sin(x)$ auf $\mathbb{R}_+$ und es gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha)\left(-s_\alpha(t)\cos(t) + c_\alpha(t)\sin(t)\right) = \int_0^t \tau^{\alpha-1}\sin(\tau)\,d\tau$$

Durch die Substitution $\tau \mapsto \beta\tau$ $\left(\beta \in \mathbb{R}_+\right)$ ergeben sich offenbar Stammfunktionen von $x^{\alpha-1}\sin(\beta x)$ und $x^{\alpha-1}\cos(\beta x)$.

Wegen $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad \sin(-\tau) = -\sin(\tau)$ und $\forall \tau \in \mathbb{R} \quad \cos(-\tau) = \cos(\tau)$ ergeben sich dann schließlich offenbar auch Stammfunktionen von $x^{\alpha-1}\sin(\beta x)$ und $x^{\alpha-1}\cos(\beta x)$ $(\beta \neq 0)$.

11. Literaturverzeichnis

[1] Jürgen Neukirch
„Algebraische Zahlentheorie“
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[2] Wolfgang Walter
„Gewöhnliche Differentialgleichungen“
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[3] Bronstein – Semendjajew
„Taschenbuch der Mathematik“
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main)

[4] www.Wikipedia.org

[5] N. N. Lebedev
„Special Functions & Their Applications“
Dover Publications, Inc., New York

[6] Milton Abramowitz and Irene Stegun
„Handbook of Mathematical Functions“
Dover Publications, Inc., New York