Geometrie der Cartan'schen Ableitung

1. Notation

Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

1. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller r-fach $\mathbb{R}$-multilinearen Abbildungen $f: \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R}$.

2. Wir bezeichnen mit S_r die Gruppe aller Permutationen $\sigma: \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$. Des weiteren bezeichne $\operatorname{sgn}_r(\ldots)$ die Signum-Funktion von S_r.

3. Sei $f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$. Wir definieren dann:

$$\left(f \text{ ist alternierend}\right) \;:\Leftrightarrow\; \left(\forall \pi \in S_r \quad \forall v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad f\left(v_1, \ldots, v_r\right) = \operatorname{sgn}_r(\pi)\, f\left(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(r)}\right)\right)$$

4. Wir definieren:

$$\mathfrak{L}^r_{\text{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) := \left\{f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) : \; f \text{ ist alternierend}\right\}$$

$\mathfrak{L}^r_{\text{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

5. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $f: V \to V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Sei U ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von V. Wir definieren dann:

$$\left(f \text{ ist eine Projektion von } V \text{ auf } U\right) \quad :\Leftrightarrow$$
$$\left(f \circ f = f \quad \text{und} \quad f(V) = U\right)$$

Sei f eine Projektion von V auf U. Dann gilt:

$$\left(\forall u \in U \quad f(u) = u\right) \quad \text{und} \quad \left(\operatorname{kern}(f)\right) \cap U = \{0\}$$

6. Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Sei $\varphi \in C^\infty(G)$. Dann bezeichne $d\varphi : G \to \mathfrak{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ das sogenannte totale Differential von φ.

7. Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$. Wir definieren dann $A_r^m(G)$ als die Menge aller alternierenden C^∞-Differentialformen $\omega : G \to \mathfrak{L}_{\mathrm{alt}}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.
Weiterhin bezeichne $\mathfrak{d}\ldots$ die sogenannte Cartan'sche – oder äußere - Ableitung.

2. Projektion und alternierende Multilinearformen

Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

Wir definieren nun eine offenbar $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{pr}_{r,m} : \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \to \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}_{r,m}(\varphi)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) :=$$
$$:= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}_r(\sigma)\ \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)$$

Dann gilt der folgende Satz:

Satz:

Beh.: $\mathrm{pr}_{r,m}$ ist eine Projektion von $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ auf $\mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

Bew.: In 3 Schritten:

1. Es gilt $\mathrm{pr}_{r,m}\left(\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)\right) \subseteq \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$, d.h. es ist zu zeigen:

$$\forall f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \mathrm{pr}_{r,m}(f) \text{ ist alternierend} \qquad (1)$$

Beweis von (1):

Sei $f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

Seien $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$.
Sei $\pi \in S_r$.

Wir definieren nun $w_1, \dots, w_r \in \mathbb{R}^m$ durch

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad w_i := v_{\pi(i)} \tag{2}$$

Dann gilt insbesondere:

$$\forall \kappa \in \mathrm{S}_r \quad \forall j \in \{1, \dots, r\} \quad w_{\kappa(j)} = v_{\pi \circ \kappa(j)} \tag{3}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{pr}_{r,m}(f)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) = \\
&\quad = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} \mathrm{sgn}_r(\sigma)\, f\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} \mathrm{sgn}_r(\pi \circ \sigma)\, f\left(v_{\pi \circ \sigma(1)}, \dots, v_{\pi \circ \sigma(r)}\right)
\end{aligned}$$

Dann folgt mittels (2) und (3):

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{pr}_{r,m}(f)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) = \\
&\quad = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} \mathrm{sgn}_r(\pi \circ \sigma)\, f\left(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(r)}\right) = \\
&\quad = \frac{\mathrm{sgn}_r(\pi)}{r!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} \mathrm{sgn}_r(\sigma)\, f\left(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(r)}\right) = \\
&\quad = \mathrm{sgn}_r(\pi)\left(\mathrm{pr}_{r,m}(f)\right)\left(w_1, \dots, w_r\right) = \\
&\quad = \mathrm{sgn}_r(\pi)\left(\mathrm{pr}_{r,m}(f)\right)\left(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}\right)
\end{aligned}$$

2. Es gilt $\mathrm{pr}_{r,m}\left(\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)\right) \supseteq \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$, d.h. es ist wegen $\mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \subseteq \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ nur zu zeigen:

$$\forall g \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \mathrm{pr}_{r,m}(g) = g \tag{4}$$

Beweis von (4):

Sei $g \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

Seien $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^m$.
Dann folgt:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{pr}_{r,m}(g)\right)\left(v_1, \ldots, v_r\right) &= \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}_r(\sigma)\; g\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

Da $g \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$, gilt:

$$\begin{aligned}\forall \sigma \in S_r \quad g\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right) &= \\ &= \mathrm{sgn}_r(\sigma)\, g\left(v_1, \ldots, v_r\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Außerdem gilt:

$$\# S_r = r! \tag{7}$$

Aus (5) - (7) folgt offenbar:

$$\left(\mathrm{pr}_{r,m}(g)\right)\left(v_1, \ldots, v_r\right) = g\left(v_1, \ldots, v_r\right)$$

3. Es gilt $\mathrm{pr}_{r,m} \circ \mathrm{pr}_{r,m} = \mathrm{pr}_{r,m}$, d.h. es ist nur zu zeigen:

$$\forall h \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \left(\mathrm{pr}_{r,m} \circ \mathrm{pr}_{r,m}\right)(h) = \mathrm{pr}_{r,m}(h)$$

Dies ist aber eine Konsequenz von (1) und (4).

3. Hilfsmittel

Satz: Formel für die Signum-Funktion sgn_r auf S_r

Vor.: Sei $r \in \mathbb{N}_+$ mit $r \geq 2$.

Beh.:

$$\forall \pi \in S_r \quad \mathrm{sgn}_r(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

Bem.: Wegen $S_1 = \left\{\mathrm{id}_{\{1\}}\right\}$ gilt offenbar:

$$\forall \pi \in S_1 \quad \mathrm{sgn}_1(\pi) = 1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 1} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

Satz: Eine Eigenschaft der Signum-Funktion sgn_r auf S_r

Vor.: Sei $r \in \mathbb{N}_+$.
Sei $\pi \in S_{r+1}$.

Beh.: $\pi(r+1) = r+1 \quad \Rightarrow$
$(\pi \mid \{1, \dots, r\}) \in S_r \quad \wedge \quad \operatorname{sgn}_r (\pi \mid \{1, \dots, r\}) = \operatorname{sgn}_{r+1} (\pi)$

Bew.: Gelte $\pi(r+1) = r+1$. Da $\pi : \{1, \dots, r+1\} \to \{1, \dots, r+1\}$ bijektiv ist, folgt dann:

$$(\pi \mid \{1, \dots, r\}) : \{1, \dots, r\} \to \{1, \dots, r\} \text{ ist bijektiv}$$

bzw.

$$(\pi \mid \{1, \dots, r\}) \in S_r$$

Dann folgt sofort:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}_{r+1} (\pi) &= \prod_{1 \le i < j \le r+1} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} = \\
&= \left(\prod_{1 \le i < j \le r} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} \right) \left(\prod_{1 \le i < j = r+1} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} \right) = \\
&= \operatorname{sgn}_r (\pi \mid \{1, \dots, r\}) \left(\prod_{i=1}^{r} \frac{\pi(i) - \pi(r+1)}{i - (r+1)} \right) = \\
&= \operatorname{sgn}_r (\pi \mid \{1, \dots, r\}) \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{\pi(i) - (r+1)}{i - (r+1)} \right)}_{=1} = \\
&= \operatorname{sgn}_r (\pi \mid \{1, \dots, r\})
\end{aligned}$$

Def.: Sei $r \in \mathbb{N}_+$.
Sei $k \in \{1, \dots, r+1\}$.
Wir definieren dann $\lambda_{k,r} \in S_{r+1}$ durch

$$\forall i \in \{1, \dots, r+1\} \quad \lambda_{k,r}(i) := \begin{cases} i & i < k \ \wedge \ i < r+1 \\ i+1 & i \geq k \ \wedge \ i < r+1 \\ k & i = r+1 \end{cases}$$

Bem.: Man kann $\lambda_{k,r}$ auch wie folgt beschreiben:

$$\lambda_{k,r} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & \dots & r & r+1 \\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & r+1 & k \end{pmatrix} \tag{*}$$

Dann gilt offenbar:

$$\lambda_{k,r}(1) < \dots < \lambda_{k,r}(r) \tag{**}$$

Satz:

Vor.: Sei $r \in \mathbb{N}_+$.
Sei $k \in \{1, \dots, r+1\}$.

Beh.: $\mathrm{sgn}_{r+1}\left(\lambda_{k,r}\right) = (-1)^{r+k-1}$

Bew.: Zunächst gilt:

$$\mathrm{sgn}_{r+1}\left(\lambda_{k,r}\right) = \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} \frac{\lambda_{k,r}(i) - \lambda_{k,r}(j)}{i - j} =$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{\lambda_{k,r}(i) - \lambda_{k,r}(j)}{i - j} \right)}_{>0 \text{ nach } (**)} \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda_{k,r}(i) - \lambda_{k,r}(r+1)}{i - (r+1)} \right)}_{= \prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda_{k,r}(i) - k}{i - (r+1)}}$$

Wir definieren eine Funktion $V : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{1,-1\}$ durch

$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad V(z) := \begin{cases} +1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

Dann bleibt zu zeigen:

$$V\left(\prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda_{k,r}(i)-k}{i-(r+1)} \right) = (-1)^{r+k-1} \tag{1}$$

Beweis hiervon:

Offenbar gilt:

$$V\left(\prod_{i=1}^{r} i-(r+1) \right) = (-1)^{r} \tag{2}$$

Weiterhin gilt nach (*):

$$\forall i \in \{1,\ldots,k-1\} \quad V\left(\lambda_{k,r}(i)-k\right) = -1 \tag{3}$$

und

$$\forall i \in \{k,\ldots,r\} \quad V\left(\lambda_{k,r}(i)-k\right) = +1 \tag{4}$$

Mit (2) - (4) folgt dann (1) (Cave $k = 1$!).

4. Bekannte Eigenschaften der Cartan'schen Ableitung

Satz: Invariante Beschreibung der Cartan'schen Ableitung

Vor.: Sei $m \in \mathbb{N}_+$.

Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

Sei $\omega \in A_r^m(G)$.

Sei $p \in G$.

Seien $v_0, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$.

Beh.: $(\mathfrak{d}\omega)_p\left(v_0, \dots, v_r\right) =$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\dots}\left(v_0, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_r\right)\right)\right)\left(v_k\right)$$

5. Neue invariante Beschreibung der Cartan'schen Ableitung

Satz:

Vor.: Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$.
Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.
Sei $\omega \in A_r^m(G)$.
Sei $p \in G$.
Wir definieren $\zeta \in \mathfrak{L}^{r+1}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\forall w_1, \ldots, w_{r+1} \in \mathbb{R}^m \quad \zeta\left(w_1, \ldots, w_{r+1}\right) := \\ := \left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\ldots}\left(w_1, \ldots, w_r\right)\right)\right)\left(w_{r+1}\right)$$

Beh.:

$$\mathrm{pr}_{r+1,m}(\zeta) = \frac{(-1)^r}{r+1}(\partial\omega)_p$$

Bew.: Seien $v_1, \ldots, v_{r+1} \in \mathbb{R}^m$.
Es gilt nach Definition:

$$\left(\mathrm{pr}_{r+1,m}(\zeta)\right)\left(v_1, \ldots, v_{r+1}\right) = \\ = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \mathrm{sgn}_{r+1}(\sigma)\ \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r+1)}\right) \tag{1}$$

Nun gilt aber

$$\sum_{\sigma \in S_{r+1}} \operatorname{sgn}_{r+1}(\sigma)\, \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+1} \\ \sigma(r+1)=k}} \operatorname{sgn}_{r+1}(\sigma)\, \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}, v_k\right) \tag{2}$$

und (Beweis von (3) später)

$$\forall k \in \{1, \dots, r+1\} \quad \forall \begin{pmatrix} \sigma \in S_{r+1} \\ \sigma(r+1) = k \end{pmatrix}$$

$$\zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}\right) = \tag{3}$$
$$= \operatorname{sgn}_{r+1}(\sigma) \underbrace{\operatorname{sgn}_{r+1}\left(\lambda_{k,r}\right)}_{=(-1)^{r+k-1}} \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r+1)}\right)$$

und

$$\forall k \in \{1, \dots, r+1\} \quad \#\left\{\sigma \in S_{r+1} \ : \ \sigma(r+1) = k\right\} = r! \tag{4}$$

Aus (1) - (4) folgt dann offenbar:

$$\left(\mathrm{pr}_{r+1,m}(\zeta)\right)\left(v_1, \dots, v_{r+1}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^r\, r!}{(r+1)!} \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k-1} \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r+1)}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^r}{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k-1}$$
$$\left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\dots}\left(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_{r+1}\right)\right)\right)\left(v_k\right) =$$
$$= \frac{(-1)^r}{r+1} (\mathfrak{d}\omega)_p \left(v_1, \dots, v_{r+1}\right)$$

Nun zum Beweis von (3):

Sei $k \in \{1, \dots, r+1\}$.
Sei $\sigma \in S_{r+1}$ und gelte $\sigma(r+1) = k$.
Wir definieren dann $\pi \in S_{r+1}$ durch

$$\pi := \sigma^{-1} \circ \lambda_{k,r} \in S_{r+1} \tag{5}$$

und $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^m$ durch

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad u_i := v_{\sigma(i)} \tag{6}$$

Dabei gilt wegen $\sigma(r+1) = k$:

$$\pi(r+1) = r+1 \tag{7}$$

Insbesondere gilt dann:

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \left(\pi(j) \in \{1, \dots, r\} \text{ und } u_{\pi(j)} = v_{\sigma \circ \pi(j)}\right) \tag{8}$$

Damit erhält man schließlich wegen (5) – (8) und $\omega \in A_r^m(G)$:

$$\begin{aligned}
&\zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}\right) = \\
&\quad = \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \zeta\left(u_1, \dots, u_r, v_k\right) = \\
&\quad = \operatorname{sgn}_r\left(\pi \mid \{1, \dots, r\}\right) \zeta\left(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \operatorname{sgn}_{r+1}(\pi)\, \zeta\left(v_{\sigma\circ\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\pi(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \operatorname{sgn}_{r+1}\left(\sigma^{-1} \circ \lambda_{k,r}\right) \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \underbrace{\operatorname{sgn}_{r+1}\left(\sigma^{-1}\right)}_{=\operatorname{sgn}_{r+1}(\sigma)} \operatorname{sgn}_{r+1}\left(\lambda_{k,r}\right) \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r+1)}\right)
\end{aligned}$$