Konvergenzradius

Satz:

Vor.: Gelte $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Gelte $\tilde{x} = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) \mid \mathbb{R}_{+}$.

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$.

Sei $\left(a_i\right)_{i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Beh.: $\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot \tilde{x}^{n+\alpha}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$

haben den gleichen Konvergenzradius

Bem.: Sei $R \in [0; \infty]$.

R ist der Konvergenzradius von $\left(\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma\,(n+\alpha)} \cdot \tilde{x}^{n+\alpha} \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$

genau dann, wenn für alle $t \in [0; \infty[$ gilt:

$$\left(t < R \quad \Rightarrow \quad \left(\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma\,(n+\alpha)} \cdot t^{n+\alpha} \right)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ ist absolut konvergent} \right) \right)$$

und

$$\left(t > R \quad \Rightarrow \quad \left(\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma\,(n+\alpha)} \cdot t^{n+\alpha} \right)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ ist divergent} \right) \right)$$

Bem.: Sei $R \in [0; \infty[$.

Sei R der Konvergenzradius von $\left(\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n\,!} \cdot x^n \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Mit den Methoden des folgenden Beweises lässt sich offenbar zeigen:

$$\left(\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n\,!} \cdot R^n \right)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ ist absolut konvergent} \right) \Rightarrow$$
$$\left(\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma\,(n+\alpha)} \cdot R^{n+\alpha} \right)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ ist absolut konvergent} \right)$$

Bew.: Sei $\rho_0 \in [0; \infty]$ der Konvergenzradius von

$$\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$$

. Sei $\rho_\alpha \in [0; \infty]$ der Konvergenzradius

von $\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma(n + \alpha)} \cdot \tilde{x}^{n+\alpha} \right)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Zu zeigen ist also:

$$\rho_0 = \rho_\alpha$$

Ann.: $\rho_0 \neq \rho_\alpha$

1. Fall: $\rho_0 > \rho_\alpha$

Es existiert also $t \in \mathbb{R}_+$ mit $\rho_0 > t > \rho_\alpha$. Dann folgt:

$$\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n!} \cdot t^n \right)_{k \in \mathbb{N}_0} \quad \text{ist absolut konvergent}$$

und

$$\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot t^{n+\alpha} \right)_{k \in \mathbb{N}_0} \quad \text{ist divergent}$$

Andererseits gilt wegen (3) und (8) für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 1$:

$$\sum_{n=0}^{k} \left| \frac{a_n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot t^{n+\alpha} \right| =$$

$$= |t|^\alpha \left(\frac{|a_0|}{\gamma(\alpha)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{|a_n|}{\gamma(n+\alpha)} \cdot |t|^n \right) \leq$$

$$\leq |t|^\alpha \left(\frac{|a_0|}{\gamma(\alpha)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{|a_n|}{\gamma(n)} \cdot |t|^n \right) =$$

$$= |t|^\alpha \left(\frac{|a_0|}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{|a_n|}{\Gamma(n+1)} \cdot |t|^n \right) =$$

$$= |t|^\alpha \left(\frac{|a_0|}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=1}^{k} \frac{|a_n|}{n!} \cdot |t|^n \right) \leq$$

$$\leq |t|^\alpha \left(\frac{|a_0|}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{n=0}^{k} \frac{|a_n|}{n!} \cdot |t|^n \right)$$

Widerspruch!

2. Fall: $\rho_0 < \rho_\alpha$

Wegen $\alpha \in \mathbb{R}_+$ existiert $l \in \mathbb{N}_+$ mit $l - 1 \leq \alpha < l$. Dann folgt mit (8):

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \frac{1}{(n+l)!} = \frac{1}{\gamma(n+l)} \leq \frac{1}{\gamma(n+\alpha)} \qquad (*)$$

Aus der Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{(n+l)!} \cdot x^{n+l}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ erhält man durch l-maliges differenzieren die Potenzreihe $\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n!} \cdot x^{n}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$. Dann gilt nach Analysis für den Konvergenzradius $R \in [0; \infty]$ von $\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{(n+l)!} \cdot x^{n+l}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$:

$$R \leq \rho_0 < \rho_\alpha$$

Es existiert also $t \in \mathbb{R}_+$ mit $R < t < \rho_\alpha$. Dann folgt:

$\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{(n+l)!} \cdot t^{n+l}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist divergent

und

$\left(\sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{\gamma(n+\alpha)} \cdot t^{n+\alpha}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist absolut konvergent

Andererseits gilt wegen (*) für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} \left| \frac{a_n}{(n+1)!} \cdot t^{n+1} \right| &= \sum_{n=0}^{k} \frac{|a_n|}{(n+1)!} \cdot |t|^{n+1} = \\
&= \frac{|a_0|}{1!} \cdot |t|^1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{|a_n|}{(n+1)!} \cdot |t|^{n+1} \leq \\
&\leq \frac{|a_0|}{1!} \cdot |t|^1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{|a_n|}{\gamma\,(n+\alpha)} \cdot |t|^{n+1} \leq \\
&\leq \frac{|a_0|}{1!} \cdot |t|^1 + \sum_{n=0}^{k} \frac{|a_n|}{\gamma\,(n+\alpha)} \cdot |t|^{n+1} = \\
&= \frac{|a_0|}{1!} \cdot |t|^1 + |t|^{1-\alpha} \cdot \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{|a_n|}{\gamma\,(n+\alpha)} \cdot |t|^{n+\alpha} \right)
\end{aligned}$$

Widerspruch!