1. Auszug aus der klassischen axiomatischen Mengenlehre (ZFC)

1.1. Generelle Voraussetzungen

Wir betrachten einen Bereich $\mathfrak{M}$ von Objekten, die wir „Mengen“ nennen. Im weiteren Kontext bezeichne jedes Symbol A, B, M, X, Y und Z eine Menge.

Auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ sei eine zweistellige Aussageform „... ist ein Element von ...“ vorgegeben, die wir mit $\in$ bezeichnen, d. h. insbesondere: Für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X \in Y$ gilt oder ob $X \in Y$ nicht gilt (d. h. $X \notin Y$ gilt).

Ferner sei auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ eine weitere zweistellige Aussageform vorgegeben, die wir mit = bezeichnen, d. h. für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X = Y$ gilt oder ob $X = Y$ nicht gilt (d. h. $X \neq Y$ gilt). Zusätzlich dazu habe = die folgenden Eigenschaften:

1. $\forall X \quad X = X$

2. $\forall X,Y \quad (X = Y \quad \Rightarrow \quad Y = X)$

3. $\forall X,Y,Z \quad ((X = Y \quad \wedge \quad Y = Z) \quad \Rightarrow \quad X = Z)$

4. $\forall X,Y,Z \quad ((X = Y \quad \wedge \quad X \in Z) \quad \Rightarrow \quad Y \in Z)$

Hieraus folgt insbesondere:

5. $\forall X,Y,Z \quad ((X = Y \quad \wedge \quad X \notin Z) \quad \Rightarrow \quad Y \notin Z)$

1.2. Existenz-Axiom

Axiom:

Beh.: Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \notin M$$

1.3. Extensions-Axiom

Axiom:

Beh.: Für alle Mengen A, B gilt:

$$\left(\forall X \quad (X \in A \quad \Leftrightarrow \quad X \in B)\right) \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Bem.:

1. Nach 1.1. gilt sogar:

$$\left(\forall X \quad (X \in A \quad \Leftrightarrow \quad X \in B)\right) \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

2. Weiterhin gilt:

$$\left(\forall X \quad (X \in A \quad \Leftrightarrow \quad X \in B)\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\forall X \quad (X \notin A \quad \Leftrightarrow \quad X \notin B)\right)$$

3. Mit Hilfe des Existenz-Axioms und des Extensions-Axioms lässt sich zeigen:

   Es existiert genau eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \notin M$$

1.4. Axiomen-Schema der Komprehension (veraltet)

Axiom:

Vor.: Sei $P(\ldots)$ eine einstellige Aussageform auf $\mathfrak{M}$, d. h. für jede Menge X stehe fest ob $P(X)$ gilt oder ob $P(X)$ nicht gilt (d. h. $\neg(P(X))$ gilt).

Beh.: Es existiert (mindestens) eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \quad (X \in B \quad \Leftrightarrow \quad P(X))$$

Bem.:

Bem.:

1. Mit Hilfe des Axiomen-Schemas der Komprehension und des Extensions-Axioms lässt sich zeigen:

   Es existiert genau eine Menge B mit der Eigenschaft:

   $$\forall X \quad (X \in B \quad \Leftrightarrow \quad P(X))$$

   Für dieses B schreibt man auch $\{P(X)\}$.

2. „Russelsche Antinomie“:

   Nach diesem Axiom wäre $\{X \notin X\}$ eine Menge. Nach Russel führt das auf einen Widerspruch.

1.5. Axiomen-Schema der Komprehension (aktuell)

Axiom:

Vor.: Sei $P(\ldots)$ eine einstellige Aussageform auf $\mathfrak{M}$, d. h. für jede Menge X stehe fest ob $P(X)$ gilt oder ob $P(X)$ nicht gilt (d. h. $\neg(P(X))$ gilt).

Beh.: Zu jeder Menge A existiert (mindestens) eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \quad \left(X \in B \quad \Leftrightarrow \quad \left(X \in A \quad \wedge \quad P(X)\right)\right)$$

Bem.: Mit Hilfe des Axiomen-Schemas der Komprehension und des Extensions-Axioms läßt sich zeigen:

Zu jeder Menge A existiert genau eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \quad \left(X \in B \quad \Leftrightarrow \quad \left(X \in A \quad \wedge \quad P(X)\right)\right)$$

Für dieses B schreibt man auch $\{X \in A\colon\ P(X)\}$.

1.6. Theorem

Theorem:

Beh.: Es existiert keine Menge M mit der Eigenschaft

$\forall X \quad X \in M$

Bew.:

Ann.: Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \in M \tag{1}$$

Da M eine Menge ist, gilt nach dem Axiomen-Schema der Komprehension (Cave! $P(X) := X \notin X$ definiert nach der Generalvoraussetzung eine einstellige Aussageform):

$$A := \{X \in M : \; X \notin X\} \text{ ist eine Menge} \tag{2}$$

Nach (1) und (2) folgt dann:

$$A \in M \tag{3}$$

Schließlich gilt noch:

$$A \in A \text{ oder } A \notin A \tag{4}$$

1. Fall: Es gilt $A \in A$.

Dann folgt nach Definition von A:

$$A \notin A$$

Widerspruch!

2. Fall: Es gilt $A \notin A$.

Dann folgt nach (3) und Definition von A:

$$A \in A$$

Widerspruch!

2. Auszug aus einem Alien-ZFC

Wenn man im Universum einem Alien ☺ begegnet würde, so könnte dessen ZFC so aussehen wie in diesem Kapitel 2.

2.1. Generelle Voraussetzungen

Wir betrachten einen Bereich $\mathfrak{M}$ von Objekten, die wir „Mengen" nennen. Im weiteren Kontext bezeichne jedes Symbol A, B, M, X, Y und Z eine Menge.

Auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ sei eine zweistellige Aussageform „... xyz ..." vorgegeben, die wir mit α bezeichnen, d. h. insbesondere: Für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X\alpha Y$ gilt oder ob $X\alpha Y$ nicht gilt (d. h. $X \not\alpha Y$ gilt).

Ferner sei auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ eine weitere zweistellige Aussageform vorgegeben, die wir mit = bezeichnen, d. h. für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X = Y$ gilt oder ob $X = Y$ nicht gilt (d. h. $X \neq Y$ gilt). Zusätzlich dazu habe = die folgenden Eigenschaften:

1. $\forall X \quad X = X$
2. $\forall X,Y \quad (X = Y \quad \Rightarrow \quad Y = X)$
3. $\forall X,Y,Z \quad ((X = Y \quad \wedge \quad Y = Z) \quad \Rightarrow \quad X = Z)$
4. $\forall X,Y,Z \quad ((X = Y \quad \wedge \quad X\alpha Z) \quad \Rightarrow \quad Y\alpha Z)$

Hieraus folgt insbesondere:

5. $\forall X,Y,Z \quad ((X = Y \quad \wedge \quad X \not\alpha Z) \quad \Rightarrow \quad Y \not\alpha Z)$

2.2. Existenz-Axiom

Axiom:

Beh.: Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \not\alpha M$$

2.3. Extensions-Axiom

Axiom:

Beh.: Für alle Mengen A, B gilt:

$$\big(\forall X \quad (X\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X\alpha B)\big) \quad \Rightarrow \quad A = B$$

Bem.: 1. Nach 2.1. gilt sogar:

$$\big(\forall X \quad (X\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X\alpha B)\big) \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

2. Weiterhin gilt:

$$\big(\forall X \quad (X\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X\alpha B)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall X \quad (X \not\alpha A \quad \Leftrightarrow \quad X \not\alpha B)\big)$$

3. Mit Hilfe des Existenz-Axioms und des Extensions-Axioms lässt sich zeigen:

   Es existiert genau eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \not\alpha M$$

2.4. Axiomen-Schema der Komprehension (veraltet)

Axiom:

Vor.: Sei $P(\ldots)$ eine einstellige Aussageform auf $\mathfrak{M}$, d. h. für jede Menge X stehe fest ob $P(X)$ gilt oder ob $P(X)$ nicht gilt (d. h. $\neg(P(X))$ gilt).

Beh.: Es existiert (mindestens) eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \quad (X \alpha B \quad \Leftrightarrow \quad P(X))$$

Bem.:

Bem.:

1. Mit Hilfe des Axiomen-Schemas der Komprehension und des Extensions-Axioms lässt sich zeigen:

   Es existiert genau eine Menge B mit der Eigenschaft:

   $$\forall X \quad (X \alpha B \quad \Leftrightarrow \quad P(X))$$

   Für dieses B schreibt man auch $\{P(X)\}_{\alpha}$.

2. „Russelsche Antinomie“:

   Nach diesem Axiom wäre $\{X \not\alpha X\}_{\alpha}$ eine Menge. Nach Russel führt das auf einen Widerspruch.

2.5. Axiomen-Schema der Komprehension (aktuell)

Axiom:

Vor.: Sei $P(\ldots)$ eine einstellige Aussageform auf $\mathfrak{M}$, d. h. für jede Menge X stehe fest ob $P(X)$ gilt oder ob $P(X)$ nicht gilt (d. h. $\neg(P(X))$ gilt).

Beh.: Zu jeder Menge A existiert (mindestens) eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \ \left(X \alpha B \ \Leftrightarrow \ \left(X \alpha A \ \wedge \ P(X) \right) \right)$$

Bem.: Mit Hilfe des Axiomen-Schemas der Komprehension und des Extensions-Axioms läßt sich zeigen:

Zu jeder Menge A existiert genau eine Menge B mit der Eigenschaft:

$$\forall X \ \left(X \alpha B \ \Leftrightarrow \ \left(X \alpha A \ \wedge \ P(X) \right) \right)$$

Für dieses B schreibt man auch $\left\{ X \alpha A : \ P(X) \right\}_{\alpha}$.

2.6. Theorem

Theorem:

Beh.: Es existiert keine Menge M mit der Eigenschaft

$\forall X \quad X \alpha M$

Bew.:

Ann.: Es existiert eine Menge M mit der Eigenschaft

$$\forall X \quad X \alpha M \tag{1}$$

Da M eine Menge ist, gilt nach dem Axiomen-Schema der Komprehension (Cave! $P(X) := X \not\alpha X$ definiert nach der Generalvoraussetzung eine einstellige Aussageform):

$$A := \{X \alpha M : \ X \not\alpha X\}_\alpha \text{ ist eine Menge} \tag{2}$$

Nach (1) und (2) folgt dann:

$$A \alpha M \tag{3}$$

Schließlich gilt noch:

$$A \alpha A \text{ oder } A \not\alpha A \tag{4}$$

1. Fall: Es gilt $A \alpha A$.

Dann folgt nach Definition von A:

$A \not\alpha A$

Widerspruch!

2. Fall: Es gilt $A \not\alpha A$.

Dann folgt nach (3) und Definition von A:

$A \alpha A$

Widerspruch!

3. Beobachtungen

3.1. Vergleich mit ZFC und $\notin$-ZFC

Man kann der Theorie aus Kapitel 2. nicht ansehen, welches Axiomen-System (ZFC oder $\notin$-ZFC) gemeint ist.

3.2. Erweiterung von [2]

Jede zweistellige Aussageform β auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ gibt Anlass zu einer Mengenlehre β-ZFC ähnlich wie in Kapitel 2. Diese Mengenlehre ist unter Umständen schwieriger zu interpretieren als ZFC oder $\notin$-ZFC.

Man kann der Theorie aus Kapitel 2. nicht ansehen, welches Axiomen-System β-ZFC gemeint ist.

3.3. Symmetrie

Aus **Symmetriegründen** existiert zu jeder Aussageform β auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ ein Alien ☺, das β-ZFC als Mengenlehre einsetzt.

4. Modifikation von 2.1.

Wenn Sie also Aliens ☺ im Universum begegnen würden, so könnten Sie über ihre ZFCs nur die folgende Theorie annehmen:

Wir betrachten einen Bereich $\mathfrak{M}$ von Objekten, die wir „Mengen" nennen. Im weiteren Kontext bezeichne jedes Symbol A, B, M, X, Y und Z eine Menge.

Sei α eine zweistellige Aussageform auf dem Bereich $\mathfrak{M}$, d. h. insbesondere: Für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X\alpha Y$ gilt oder ob $X\alpha Y$ nicht gilt (d. h. $X\not\alpha Y$ gilt)

Ferner sei auf dem Bereich $\mathfrak{M}$ eine weitere zweistellige Aussageform vorgegeben, die wir mit = bezeichnen, d. h. für je zwei Mengen X, Y stehe fest, ob $X=Y$ gilt oder ob $X=Y$ nicht gilt (d. h. $X\neq Y$ gilt). Zusätzlich dazu habe = die folgenden Eigenschaften:

1. $\forall X \quad X=X$

2. $\forall X,Y \quad (X=Y \quad \Rightarrow \quad Y=X)$

3. $\forall X,Y,Z \quad ((X=Y \quad \wedge \quad Y=Z) \quad \Rightarrow \quad X=Z)$

4. $\forall X,Y,Z \quad ((X=Y \quad \wedge \quad X\alpha Z) \quad \Rightarrow \quad Y\alpha Z)$

Hieraus folgt insbesondere:

5. $\forall X,Y,Z \quad ((X=Y \quad \wedge \quad X\not\alpha Z) \quad \Rightarrow \quad Y\not\alpha Z)$

Dies führt wie in [2] auf einen Widerspruch!

5. Literaturverzeichnis

[1] Vorlesungen über Mathematik 1987 - 2002
Universität zu Köln

[2] „Das Ende von ZFC"
WWW.Reinbothe.DE

[3] Introduction to Axiomatic Set Theory
Graduate Texts in Mathematics
G. Takeuti, W. M. Zaring
Springer-Verlag