Eine neue Art von Potenzreihen und zwei Transformationen

von Christian Reinbothe

http://WWW.Reinbothe.DE/deutsch/mathPreprints.htm

Abstrakt

Wir betrachten das Problem, für ein gegebenes $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und eine gegebene Potenzreihe $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Stammfunktion von $x^{\alpha-1}F(x)$ zu berechnen. Die Lösung des Problems ist die Transformation der Potenzreihe F in eine neue Art von Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \underset{\alpha}{\mapsto} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\alpha} a_n x^{n+\alpha} \tag{T1}$$

Nun betrachten wir eine weitere Potenzreihe G. Mit $\gamma(z) := \Gamma(z+1)$ gilt:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(n)}(0)}{\gamma(n)} x^n$$

Also gibt es eine zweite Transformation einer Potenzreihe in die neue Art von Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \quad \underset{\alpha}{\mapsto} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\gamma(n+\alpha)} x^{n+\alpha} \tag{T2}$$

Das Differenzieren der Transformation (T2) ergibt im günstigen Fall eine gutartige gewöhnliche lineare DGL. Dann führt der Vergleich der Transformation (T1) mit den Termen der expliziten Lösung der DGL zu einer interessanten Gleichung. Man kann diese Methode auf jede Potenzreihe anwenden, bei der die b_n "gut" zuammenhängen.

Im Falle der hier betrachteten Beispiele vergleichen die resultierenden Gleichungen zwei verschiedene Reihenentwicklungen für die Stammfunktion von $x^{\alpha-1}F(x)$ bzw. $x^{\alpha}F(x)$.

Betrachtung von $F(x) = e^{x}$ und $G(x) = e^{-x}$

Für alle $\alpha, t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \right) - (-1)^n \, e^t \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{t^{n+\alpha}}{n+\alpha} = 0$$

Der Beweis ist einfach.

Betrachtung von $F(x) = e^{-x}$ und $G(x) = e^{x}$

Für alle $\alpha, t \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \right) - e^{-t} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{t^{n+\alpha}}{n+\alpha} = 0$$

Der Beweis ist einfach.

Betrachtung von $F(x) = 1 / (1 + x)$ und $G(x) = 1 / (1 - x)$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und alle $t \in \left]0; 1\right[$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \right) - \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{n!}{n+\alpha} \, t^{n+\alpha} = 0$$

Betrachtung von $F(x) = 1 / (1 - x)$ und $G(x) = 1 / (1 + x)$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und alle $t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \right) - \frac{(-1)^n}{(1-t)^{n+1}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{n!}{n+\alpha} \, t^{n+\alpha} = 0$$

Betrachtung von $F(x) = 1 / (1 + x)$ und $G(x) = -\ln(1 - x)$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und alle $t \in \,]0; 1[$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) - \frac{1}{(1+t)^n} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{(n-1)!}{n+\alpha} t^{n+\alpha} = 0$$

Betrachtung von $F(x) = 1 / (1 - x)$ und $G(x) = \ln(1 + x)$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und alle $t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) - \frac{(-1)^{n-1}}{(1-t)^n} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{(n-1)!}{n+\alpha} t^{n+\alpha} = 0$$

Zusammenfassung

Man kann die obigen Gleichungen in Paaren zusammenfassen. Dann erhält man:
Für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \right) - e^{-t} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{t^{n}}{n+\alpha} = 0 \tag{E1}$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}_{+}$ und alle $t \in \left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1} \right) - \frac{1}{(1+t)^{n+1}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+\alpha} \right) \right) \frac{n!}{n+\alpha} t^{n} = 0 \tag{E2}$$

Für alle $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}_{+}$ und alle $t \in \left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) - \frac{1}{(1+t)^{n}} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+\tilde{\alpha}} \right) \right) \frac{(n-1)!}{n+\tilde{\alpha}} t^{n} = 0 \tag{E3}$$

Die Gleichung (E3) ist eine Folgerung aus der Gleichung (E2) mit $\alpha := \tilde{\alpha} + 1$.

Bemerkung

Man kann diese Methode erfolgreich auf $G(x) = \sin(x)$, $G(x) = \cos(x)$, $G(x) = \sinh(x)$ und $G(x) = \cosh(x)$ anwenden.

Eine offene Frage ist, ob der mögliche Geltungsbereich für t in Gleichung (E1) bzw. (E2) größer ist als $\mathbb{R}$ bzw. $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$.