# T=0
# erklärt

# 1. Symmetrie des $k$-ten Differentials

**Theorem:**

**Vor.:** Sei $k \in \mathbb{N}_+$ mit $k \geq 2$.
Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Sei $G$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.
Sei $\varphi : G \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Sei $\varphi$ $k$-times differenzierbar.

**Beh.:** $\forall p \in G \quad \mathrm{d}_p^k \varphi : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is symmetrisch

# 2. Ein Spezialfall der Cartan'schen Ableitung

**Theorem:**

**Vor.:** Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Sei $G$ eine offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Sei $V : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $\omega : G \to \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ definiert durch

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \mathrm{d}x_i$$

(d.h. $\omega : G \to \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ ist stetig differenzierbar)

**Beh.:** $\forall p \in G \quad \left(\mathfrak{d}_p \omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}_p V \text{ ist selbstadjungiert}\right)$

**Bem.:**

1. $\mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller $\mathbb{R}$-Linearforms $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
2. $\omega$ ist eine sog. $C^1$-Differential-Form vom Grad 1.
3. $\mathfrak{d}\ldots$ ist die Cartan'sche Ableitung. Im Fall $n = 3$ gilt das Folgende:
   $\mathfrak{d}\ldots \forall p \in G \quad \left(\left(\mathfrak{d}_p \omega = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{rot}_p\,(V) = 0\right)\right)$.

# 3. Vektor Potential

**Theo.:**

**Vor.:** Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Sei $G$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

**Beh.:**

1. Sei $\varphi \in C^2(G)$.
   Dann gilt das Folgende:
   $\left(\forall p \in G \quad \left(\mathrm{d}_p\left(\mathrm{grad}(\varphi)\right) \text{ ist selbstadjungiert}\right)\right)$

2. Sei $G$ sternfoermig.
   Sei $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.
   Sei $V : G \to \mathbb{R}^n$ eine $k$-mal stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt das Folgende:
   $\left(\forall p \in G \quad \left(\mathrm{d}_p V \text{ ist selbstadjungiert}\right)\right) \quad \Rightarrow$
   $\exists \varphi \in C^{k+1}(G) \quad V = \mathrm{grad}(\varphi)$

# 4. Die Umkehrung von 1 ($k$=2)

**Theorem:**

**Vor.:** Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Sei $G$ eine offene sternfoermige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Sei $\alpha : G \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

Sei $\beta : G \to \mathfrak{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definiert durch

$\forall p \in G \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad (\beta_p)(v, w) := ((\mathrm{d}_p \alpha)(v))(w)$

**Beh.:** $(\forall p \in G \quad (\beta_p \text{ ist symmetrisch})) \quad \Rightarrow$

$(\exists \varphi \in C^2(G) \quad (\mathrm{d}\varphi = \alpha \quad \wedge \quad \mathrm{d}^2\varphi = \beta))$

**Bem.:** $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ ist } \mathbb{R}\text{-bilinear}\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

**Bew.:** Sei $\mathfrak{E} := (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Sei $\mathfrak{X} := (x_1, \dots, x_n)$ die zu $\mathfrak{E}$ duale Basis des $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Sei die Abbildung $V : G \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\forall p \in G \quad V(p) := \begin{pmatrix} \alpha_p(e_1) \\ \vdots \\ \alpha_p(e_n) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dann gilt das Folgende:

$$V : \ G \to \mathbb{R}^n \text{ ist stetig differenzierbar} \tag{2}$$

und

$$\forall p \in G \quad \mathrm{d}_p V = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_p \left( \alpha_{\dots} \left( e_1 \right) \right) \\ \vdots \\ \mathrm{d}_p \left( \alpha_{\dots} \left( e_n \right) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \mathrm{d}_p \alpha \right) \left( e_1 \right) \\ \vdots \\ \left( \mathrm{d}_p \alpha \right) \left( e_n \right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall p \in G \quad \left( \mathrm{d}_p V \right) \left( e_j \right) = \frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{4}$$

Eine Konsequenz von (3) ist:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall p \in G \quad \left( \mathrm{d}_p V \right) \left( e_j \right) = \begin{pmatrix} \left( \mathrm{d}_p \alpha \right) \left( e_1 \right) \\ \vdots \\ \left( \mathrm{d}_p \alpha \right) \left( e_n \right) \end{pmatrix} \left( e_j \right)$$

Dann folgt nach Vor.:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall p \in G \quad \left( \mathrm{d}_p V \right) \left( e_j \right) = \begin{pmatrix} \left( \beta_p \right) \left( e_1, e_j \right) \\ \vdots \\ \left( \beta_p \right) \left( e_n, e_j \right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Weil $\left( \forall p \in G \ \left( \beta_p \text{ ist symmetrisch} \right) \right)$, folgt mit (4) und (5):

$$\left( \forall p \in G \ \left( \mathrm{d}_p V \text{ ist sebstadjungiert} \right) \right)$$

(6)

Nach (2), (6) und Theorem 3.2, existiert $\varphi \in C^2(G)$ mit

$$V = \mathrm{grad}(\varphi) \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) gilt für alle $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\forall p \in G$:

$$\left(\mathrm{d}_p \varphi\right)\left(e_i\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) = \left(\mathrm{grad}_p\ (\varphi)\right)_i = V_i\ (p) = \alpha_p\ \left(e_i\right)$$

d.h.

$$\mathrm{d}\varphi = \alpha \tag{8}$$

Dann folgt für alle $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ und für alle $\forall p \in G$:

$$\mathrm{d}_p^2 \varphi\left(e_i, e_j\right) = \left(\mathrm{d}_p\ \left(\left(\mathrm{d}_{\dots} \varphi\right)\left(e_i\right)\right)\right)\left(e_j\right) = \left(\mathrm{d}_p\ \left(\left(\alpha_{\dots}\right)\left(e_i\right)\right)\right)\left(e_j\right)$$

d.h.

$$\mathrm{d}_p^2 \varphi\left(e_i, e_j\right) = \left(\left(\mathrm{d}_p\ (\alpha)\right)\left(e_i\right)\right)\left(e_j\right)$$

d.h. nach Vor.

$$\mathrm{d}_p^2 \varphi\left(e_i, e_j\right) = \left(\beta_p\ \left(e_i, e_j\right)\right)$$

Am Ende haben wir

$$\mathrm{d}^2 \varphi = \beta \tag{9}$$

# 5. Karten

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ .
Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension $n$ .
Sei $x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ .
Sei $u$ eine Karte von $M$ .
Dann gilt das Folgende:

$\mathrm{G}u$ ist eine glatte offene Untermannigfaltigkeit von $M$

$u(\mathrm{G}u)$ ist eine glatte offene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$

$\mathrm{T}(\mathrm{G}u)$ ist eine glatte offene Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{T}M$

$\mathrm{T}(u(\mathrm{G}u))$ ist eine glatte offene Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{T}\left(\mathbb{R}^n\right)$

$$u_\star \left(u^{-1}\right)_\star = \left(\mathrm{id}_{u(\mathrm{G}u)}\right)_\star = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(u(\mathrm{G}u))}$$

$$\left(u^{-1}\right)_\star u_\star = \left(\mathrm{id}_{\mathrm{G}u}\right)_\star = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(\mathrm{G}u)}$$

$u_\star : \mathrm{T}(\mathrm{G}u) \to \mathrm{T}(u(\mathrm{G}u))$ ist ein Diffeomorphismus

$$\left(u_\star\right)^{-1} = \left(u^{-1}\right)_\star$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \frac{\partial}{\partial u_k} = \left(u^{-1}\right)_\star \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \circ u\right)$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad u_\star \frac{\partial}{\partial u_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \circ u$$

# 6. Anwendung von 4

**Theorem:**

**Vor.:** Sei $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 2$.

Sei $(M, < \ldots ; \ldots >)$ eine Riemannsche $C^\infty$-Mannigfaltigkeit der Dimension $n$.
Sei $\nabla$ ein affiner Zusammenhang auf $M$.
Sei $\nabla$ Kompatibel mit der Metrik $< \ldots ; \ldots >$.
Sei T der Torsions-Tensor-Feld von $\nabla$.
Sei $u$ eine Karte von $M$ mit $\mathrm{G}u = M$.
Sei $u(\mathrm{G}u) = u(M) \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig.
Wir definieren die sog. "Christoffel-Symbole" durch

$$\forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\} \quad \Gamma^k_{ij} := \underbrace{< \nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u_j} ; \frac{\partial}{\partial u_k} >}_{\in C^\infty(M,\mathbb{R})}$$

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Wir definieren eine $C^\infty$-Abbildung $g : u(\mathrm{G}u) \to \mathfrak{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\forall q \in u(\mathrm{G}u) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n \quad g_q(a, b) :=$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_k \left( < \left(u^{-1}\right)_\star \frac{\partial}{\partial x_j} ; \left(u^{-1}\right)_\star \frac{\partial}{\partial x_k} > \right)_q$$

**Beh.:** Sei für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\varphi_k \in C^2(u(\mathrm{G}u), \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von $g(e_k, \ldots) : u(\mathrm{G}u) \to \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$. Dann gilt das Folgende:

$$\mathrm{T} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\left( \forall k \in \{1, \ldots, n\} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad \left(\left(\Gamma^k_{ij} \circ u^{-1}\right) + \frac{1}{2} \mathrm{d}\left(g\left(e_i, e_j\right)\right)\left(e_k\right) = \mathrm{d}^2\left(\varphi_k\right)\left(e_i, e_j\right)\right)\right)$$

**Bem.:** Wir wenden 4. an und erhalten für alle $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{pmatrix} \text{Es existiert eine Stammfunktion von} \\ g\left(e_k, \dots\right) : u\left(\mathrm{G}u\right) \to \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right) \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \mathrm{d}\left(g\left(e_k, e_j\right)\right)\left(e_i\right) = \mathrm{d}\left(g\left(e_k, e_i\right)\right)\left(e_j\right) \end{pmatrix}$$

**Bew:** Der Fall "$\Leftarrow$" ist trivial. Gelte also $\mathrm{T} = 0$.

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$. Weil $\mathrm{T} = 0$ und weil $\nabla$ kompatibel mit der Metrik $< \dots ; \dots >$ ist, gibt es eine bekannte Formel für die "Christoffel-Symbols". Für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\Bigg( \frac{\partial}{\partial u_i} \bullet < \frac{\partial}{\partial u_j} ; \frac{\partial}{\partial u_k} > + \\ + \frac{\partial}{\partial u_j} \bullet < \frac{\partial}{\partial u_k} ; \frac{\partial}{\partial u_i} > + \\ - \frac{\partial}{\partial u_k} \bullet < \frac{\partial}{\partial u_i} ; \frac{\partial}{\partial u_j} > \Bigg)$$

Das Folgende ist elementar:

$$\forall \iota \in \{1, \dots, n\} \qquad \frac{\partial}{\partial u_\iota} = \left(u^{-1}\right)_\star \frac{\partial}{\partial x_\iota} \circ u$$

Damit erhalten wir für alle $\iota, \kappa, \lambda \in \{1, \dots, n\}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_\iota} \bullet < \frac{\partial}{\partial u_\kappa} ; \frac{\partial}{\partial u_\lambda} >\right) \circ u^{-1} =$$

$$= \left(\left(\left(u^{-1}\right)_\star \frac{\partial}{\partial x_\iota} \circ u\right) \bullet < \frac{\partial}{\partial u_\kappa} ; \frac{\partial}{\partial u_\lambda} >\right) \circ u^{-1} =$$

$$= \left(\left(u^{-1}\right)_\star \frac{\partial}{\partial x_\iota}\right) \bullet < \frac{\partial}{\partial u_\kappa} ; \frac{\partial}{\partial u_\lambda} > =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\iota} \bullet \left( < \frac{\partial}{\partial u_\kappa} ; \frac{\partial}{\partial u_\lambda} > \circ u^{-1}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\iota} \bullet \left( < \left(u^{-1}\right)_\star \frac{\partial}{\partial x_\kappa} ; \left(u^{-1}\right)_\star \frac{\partial}{\partial x_\lambda} >\right)$$

Wir erinnern uns nun an die Abbildung $g : u(\mathrm{G}u) \to \mathfrak{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$. Dann gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\Gamma^k_{ij} \circ u^{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \bullet g\left(e_j, e_k\right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \bullet g\left(e_k, e_i\right) + - \frac{\partial}{\partial x_k} \bullet g\left(e_i, e_j\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\mathrm{d}\left(g\left(e_k, e_j\right)\right)\left(e_i\right)\right) + \left(\mathrm{d}\left(g\left(e_k, e_i\right)\right)\left(e_j\right)\right) + - \left(\mathrm{d}\left(g\left(e_i, e_j\right)\right)\left(e_k\right)\right)\right)$$

bzw.

$$\left(\Gamma^k_{ij} \circ u^{-1}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(g\left(e_i, e_j\right)\right)\left(e_k\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\left(g\left(e_k, e_j\right)\right)\left(e_i\right) + \mathrm{d}\left(g\left(e_k, e_i\right)\right)\left(e_j\right)\right) =$$

$$= \mathrm{d}\left(g\left(e_k, e_j\right)\right)\left(e_i\right) =$$

$$= \mathrm{d}^2\left(\varphi_k\right)\left(e_i, e_j\right)$$

# 7. Literatur


[1] http://WWW.Reinbothe.de/deutsch/download/Geometrie.pdf

[2] http://WWW.Reinbothe.de/deutsch/download/Tensor-Zerlegung.pdf