1. Hilfsmittel

Def.: Sei J ein nicht leeres Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Wir definieren dann:

1. $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn
   $\forall x, y \in J \quad \forall t \in [0;1] \quad \phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$

2. Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
   $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex genau dann, wenn
   $\ln(\phi) : J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Bem.: Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend ist, folgt:

$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex$) \Rightarrow$
$(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$)$

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung.

Beh.: $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$) \Leftrightarrow$
$(\phi' : J \to \mathbb{R}$ ist monoton steigend$)$

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Abbildung.

Beh.: $(\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex$) \Leftrightarrow$
$\phi'' \geq 0$

2. Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ durch das absolut konvergente Integral

$$\Gamma(\alpha) := \underbrace{\int_0^\infty \tau^{\alpha - 1} \cdot e^{-\tau} \, d\tau}_{>0}$$

definiert und es gilt:

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist analytisch} \tag{1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \tag{2}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Gamma(k + 1) = k! \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ ist logarithmisch konvex} \\ \text{(also auch konvex)}\end{gathered} \tag{4}$$

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(2) = 1 \tag{5}$$

Mit (4) und (5) folgt offenbar:

$$\Gamma \mid [2; \infty[\text{ ist monoton steigend} \tag{6}$$

Wir definieren nun eine Funktion $\gamma :]-1;\infty[\to \mathbb{R}$ durch

$$\forall u \in]-1; \infty[\quad \gamma(u) := \Gamma(u + 1)$$

Dann folgt mit (2):

$$\forall v \in]-1; \infty[\quad \gamma(v + 1) = (v + 1)\,\gamma(v) \tag{7}$$

Außerdem folgt mit (6):

$$\gamma \mid [1; \infty[\text{ ist monoton steigend} \tag{8}$$

3. Betrachtung von Taylorreihen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

Sei $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ der Konvergenzradius von $f := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Sei $J :=]0; \rho[$.
Weiter definieren wir für $\tilde{\alpha} \in]-1; \infty[$ die Funktion $p_{\tilde{\alpha}} : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall t \in J \quad p_{\tilde{\alpha}}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\gamma(n + \tilde{\alpha})}{\gamma(n + \tilde{\alpha} + 1)} t^{n+\tilde{\alpha}+1}$$

Dann folgt offenbar (Beachte (7) und (8)!) für alle $\tilde{\alpha} \in]-1; \infty[$:

$$p_{\tilde{\alpha}} : J \to \mathbb{R} \text{ ist wohldefiniert und differenzierbar}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \forall t \in J \quad \left(p_{\tilde{\alpha}}\right)'(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\gamma(n + \tilde{\alpha})}{\gamma(n + \tilde{\alpha} + 1)} \left(x^{n+\tilde{\alpha}+1}\right)'(t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\tilde{\alpha}} = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) t^{\tilde{\alpha}} = \\ &= t^{\tilde{\alpha}} f(t) \end{aligned}$$

4. Literaturverzeichnis

[1] Jürgen Neukirch
„Algebraische Zahlentheorie“
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[2] Wolfgang Walter
„Gewöhnliche Differentialgleichungen“
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[3] Bronstein – Semendjajew
„Taschenbuch der Mathematik“
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main)

[4] www.Wikipedia.org

[5] N. N. Lebedev
„Special Functions & Their Applications“
Dover Publications, Inc., New York

[6] Milton Abramowitz and Irene Stegun
„Handbook of Mathematical Functions“
Dover Publications, Inc., New York