1. Notation

Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

1. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller r-fach $\mathbb{R}$-multilinearen Abbildungen $f : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{r\text{-mal}} \to \mathbb{R}$.

2. Wir bezeichnen mit S_r die Gruppe aller Permutationen $\sigma : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$. Des weiteren bezeichne $\mathrm{sgn}_r(\ldots)$ die Signum-Funktion von S_r.

3. Sei $f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$. Wir definieren dann:

$$\left(f \text{ ist alternierend}\right) \;:\Leftrightarrow\; \left(\forall \pi \in \mathrm{S}_r \quad \forall v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad f\left(v_1, \ldots, v_r\right) = \mathrm{sgn}_r(\pi)\, f\left(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(r)}\right)\right)$$

4. Wir definieren:

$$\mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) := \left\{f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) : \ f \text{ ist alternierend}\right\}$$

$\mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

5. Sei $f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$. Wir definieren dann:

$$(f \text{ ist symmetrisch}) \quad :\Leftrightarrow$$
$$\left(\forall \pi \in S_r \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad f\left(v_1, \dots, v_r\right) = f\left(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}\right)\right)$$

6. Wir definieren:

$$\mathfrak{L}^r_{\text{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) := \left\{f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) : \quad f \text{ ist symmetrisch}\right\}$$

$\mathfrak{L}^r_{\text{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ ist ein $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

7. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Sei $f : V \to V$ eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Sei U ein $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von V. Wir definieren dann:

$$f \text{ ist eine Projektion} \quad :\Leftrightarrow \quad f \circ f = f$$

und

$$(f \text{ ist eine Projektion von } V \text{ auf } U) \quad :\Leftrightarrow$$
$$(f \circ f = f \quad \text{und} \quad \text{img}(f) = U)$$

Sei f eine Projektion von V auf U. Dann gilt:

$$(\forall u \in U \quad f(u) = u) \quad \text{und} \quad (\text{kern}(f)) \cap U = \{0\}$$

2. Alternierende Multilinearformen

Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

Wir definieren nun eine offenbar $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} : \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \to \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m}(\varphi)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) :=$$
$$:= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}_r(\sigma)\, \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)$$

Dann gilt der folgende Satz:

Satz:

Beh.: $\mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m}$ ist eine Projektion von $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ auf $\mathfrak{L}_{\mathrm{alt}}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

Satz:

Vor.: Sei $m \in \mathbb{N}_+$.

Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

Sei $\omega : G \to \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ stetig differenzierbar.

Sei $p \in G$.

Wir definieren $\zeta \in \mathfrak{L}^{r+1}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\forall w_0, \dots, w_r \in \mathbb{R}^m \quad \zeta\left(w_0, \dots, w_r\right) :=$$
$$:= \left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\dots}\left(w_0, \dots, w_{r-1}\right)\right)\right)\left(w_r\right)$$

Beh.:
$$\forall w_0, \dots, w_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}^{r+1,m}_{\mathrm{alt}}(\zeta)\right)\left(w_0, \dots, w_r\right) =$$
$$= \frac{(-1)^r}{r+1} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\dots}\left(w_0, \dots, w_{k-1}, w_{k+1}, \dots, w_r\right)\right)\right)\left(w_k\right)$$

3. Symmetrische Multilinearformen

Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

Wir definieren nun eine offenbar $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}} : \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \to \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(\varphi)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) :=$$

$$:= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)$$

Sei $k \in \{1, \dots, r+1\}$.
Wir definieren dann $\lambda_{k,r} \in S_{r+1}$ durch

$$\forall i \in \{1, \dots, r+1\} \quad \lambda_{k,r}(i) := \begin{cases} i & i < k \ \wedge \ i < r+1 \\ i+1 & i \geq k \ \wedge \ i < r+1 \\ k & i = r+1 \end{cases}$$

Man kann $\lambda_{k,r}$ auch wie folgt beschreiben:

$$\lambda_{k,r} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & \dots & r & r+1 \\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & r+1 & k \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Satz:

Beh.: $\operatorname{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}$ ist eine Projektion von $\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ auf $\mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

Bew.: In 3 Schritten:

1. Es gilt $\operatorname{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}\left(\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)\right) \subseteq \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$, d.h. es ist zu zeigen:

$$\forall f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \operatorname{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(f) \text{ ist symmetrisch} \tag{1}$$

Beweis von (1):

Sei $f \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

Seien $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^m$.
Sei $\pi \in S_r$.
Wir definieren nun $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}^m$ durch

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \quad w_i := v_{\pi(i)} \tag{2}$$

Dann gilt insbesondere:

$$\forall \kappa \in S_r \quad \forall j \in \{1, \ldots, r\} \quad w_{\kappa(j)} = v_{\pi\circ\kappa(j)} \tag{3}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(f)\right)\left(v_1, \ldots, v_r\right) = \\
&\quad = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} f\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} f\left(v_{\pi\circ\sigma(1)}, \ldots, v_{\pi\circ\sigma(r)}\right)
\end{aligned}$$

Dann folgt mittels (2) und (3):

$$\left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(f)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} f\left(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(r)}\right) =$$

$$= \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(f)\right)\left(w_1, \dots, w_r\right) =$$

$$= \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(f)\right)\left(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(r)}\right)$$

2. Es gilt $\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}\left(\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)\right) \supseteq \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)$, d.h. es ist wegen $\mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right) \subseteq \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)$ nur zu zeigen:

$$\forall g \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right) \quad \mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(g) = g \tag{4}$$

Beweis von (4):

Sei $g \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)$.

Seien $v_1,\dots,v_r \in \mathbb{R}^m$.
Dann folgt:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(g)\right)\left(v_1,\dots,v_r\right) &= \\ &= \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} g\left(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

Da $g \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)$, gilt:

$$\begin{aligned}\forall \sigma \in S_r \quad g\left(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)}\right) &= \\ &= g\left(v_1,\dots,v_r\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Außerdem gilt:

$$\# S_r = r! \tag{7}$$

Aus (5) - (7) folgt offenbar:

$$\left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(g)\right)\left(v_1,\dots,v_r\right) = g\left(v_1,\dots,v_r\right)$$

3. Es gilt $\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}} \circ \mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}} = \mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}$, d.h. es ist nur zu zeigen:

$$\forall h \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}} \circ \mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}\right)(h) = \mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}\,(h)$$

Dies ist aber eine Konsequenz von (1) und (4).

Satz:

Vor.: Sei $m \in \mathbb{N}_+$.

Sei $r \in \mathbb{N}_+$.

Sei G eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

Sei $\omega : G \to \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ stetig differenzierbar.

Sei $p \in G$.

Wir definieren $\zeta \in \mathfrak{L}^{r+1}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\forall w_0, \dots, w_r \in \mathbb{R}^m \quad \zeta\left(w_0, \dots, w_r\right) := $$
$$:= \left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\dots}\left(w_0, \dots, w_{r-1}\right)\right)\right)\left(w_r\right)$$

Beh.:

$$\forall w_0, \dots, w_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}^{r+1,m}_{\mathrm{sym}}(\zeta)\right)\left(w_0, \dots, w_r\right) =$$
$$= \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{r} \left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\dots}\left(w_0, \dots, w_{k-1}, w_{k+1}, \dots, w_r\right)\right)\right)\left(w_k\right)$$

Bew.: Seien $v_1, \dots, v_{r+1} \in \mathbb{R}^m$.

Es gilt nach Definition:

$$\left(\mathrm{pr}^{r+1,m}_{\mathrm{sym}}(\zeta)\right)\left(v_1, \dots, v_{r+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{(r+1)!} \sum_{\sigma \in S_{r+1}} \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}\right) \qquad (1)$$

Nun gilt aber

$$\sum_{\sigma \in S_{r+1}} \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{r+1} \sum_{\substack{\sigma \in S_{r+1} \\ \sigma(r+1)=k}} \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}, v_k\right) \tag{2}$$

und (Beweis von (3) später)

$$\forall k \in \{1, \dots, r+1\} \quad \forall \begin{pmatrix} \sigma \in S_{r+1} \\ \sigma(r+1) = k \end{pmatrix}$$
$$\zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}\right) = \tag{3}$$
$$= \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r+1)}\right)$$

und

$$\forall k \in \{1, \dots, r+1\} \quad \#\left\{\sigma \in S_{r+1} : \sigma(r+1) = k\right\} = r! \tag{4}$$

Aus (1) - (4) folgt dann offenbar:

$$\left(\mathrm{pr}^{r+1,m}_{\mathrm{sym}}(\zeta)\right)\left(v_1, \dots, v_{r+1}\right) =$$
$$= \frac{r!}{(r+1)!} \sum_{k=1}^{r+1} \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r+1)}\right) =$$
$$= \frac{1}{r+1} \sum_{k=1}^{r+1} \left(\mathrm{d}_p\left(\omega_{\dots}\left(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_{r+1}\right)\right)\right)\left(v_k\right)$$

Nun zum Beweis von (3):

Sei $k \in \{1, \dots, r+1\}$.
Sei $\sigma \in S_{r+1}$ und gelte $\sigma(r+1) = k$.
Wir definieren dann $\pi \in S_{r+1}$ durch

$$\pi := \sigma^{-1} \circ \lambda_{k,r} \in S_{r+1} \tag{5}$$

und $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^m$ durch

$$\forall i \in \{1, \dots, r\} \quad u_i := v_{\sigma(i)} \tag{6}$$

Dabei gilt wegen $\sigma(r+1) = k$:

$$\pi(r+1) = r+1 \tag{7}$$

Insbesondere gilt dann:

$$\forall j \in \{1, \dots, r\} \quad \left(\pi(\mathrm{j}) \in \{1, \dots, r\} \text{ und } u_{\pi(j)} = v_{\sigma\circ\pi(j)}\right) \tag{8}$$

Damit erhält man schließlich wegen (5) – (8) und $\forall q \in G \quad \omega_q \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r+1)}\right) = \\
&\quad = \zeta\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \zeta\left(u_1, \dots, u_r, v_k\right) = \\
&\quad = \zeta\left(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \zeta\left(v_{\sigma\circ\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\pi(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r)}, v_k\right) = \\
&\quad = \zeta\left(v_{\lambda_{k,r}(1)}, \dots, v_{\lambda_{k,r}(r+1)}\right)
\end{aligned}$$

4. Allgemeines über Projektionen

Satz:

Vor.: Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$ −Vektorraum.
Sei $f : V \to V$ eine Projektion.
Sei $g : V \to V$ definiert durch $g := \mathrm{id}_V - f$.

Beh.: $g : V \to V$ ist eine Projektion und es gilt:
$f \circ g = g \circ f = 0$

Bew.: Zu zeigen ist:

$$g \circ g = g \tag{1}$$

und

$$f \circ g = g \circ f = 0 \tag{2}$$

Beweis von (1):

$$\begin{aligned} g \circ g &= \left(\mathrm{id}_V - f\right) \circ \left(\mathrm{id}_V - f\right) = \\ &= \left(\mathrm{id}_V \circ \left(\mathrm{id}_V - f\right)\right) - \left(f \circ \left(\mathrm{id}_V - f\right)\right) = \\ &= \left(\mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V\right) - \left(\mathrm{id}_V \circ f\right) - \left(f \circ \mathrm{id}_V\right) + \left(f \circ f\right) = \\ &= \mathrm{id}_V - f - f + \left(f \circ f\right) = \\ &= \mathrm{id}_V - f = \\ &= g \end{aligned}$$

Beweis von (2):

$$\begin{aligned} f \circ g &= f \circ \left(\mathrm{id}_V - f\right) = \\ &= \left(f \circ \mathrm{id}_V\right) - \left(f \circ f\right) = \\ &= f - \left(f \circ f\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g \circ f &= \left(\mathrm{id}_V - f\right) \circ f = \\ &= \left(\mathrm{id}_V \circ f\right) - (f \circ f) = \\ &= f - (f \circ f) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Satz:

Vor.: Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
Sei $k \in \mathbb{N}_+$.
Sei für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$ $P_i : V \to V$ eine Projektion.

Beh.: $\left(\forall i, j \in \{1, \dots, k\} \quad \left(i \neq j \quad \Rightarrow \quad P_i \circ P_j = 0\right)\right) \quad \Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{k} P_i : V \to V \text{ ist eine Projektion und es gilt:} \\ \operatorname{img}\left(\sum\limits_{i=1}^{k} P_i\right) = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \operatorname{img}\left(P_i\right) \end{array}\right)$$

Bew.:

„=>“: Gelte $\left(\forall i, j \in \{1, \dots, k\} \quad \left(i \neq j \quad \Rightarrow \quad P_i \circ P_j = 0\right)\right)$

Dann folgt zunächst:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} P_j\right) &= \sum_{i=1}^{k} \left(P_i \circ \left(\sum_{j=1}^{k} P_j\right)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \left(P_i \circ P_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(P_i \circ P_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} P_i \end{aligned} \tag{1}$$

d.h.

$$\sum_{i=1}^{k} P_i : V \to V \text{ ist eine Projektion} \tag{2}$$

Außerdem gilt offenbar:

$$\operatorname{img}\left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right) \subseteq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{img}\left(P_i\right) \tag{3}$$

Dabei gilt nach Annahme:

$$\left(\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} \quad \left(i \neq j \quad \Rightarrow \quad \operatorname{img}\left(P_j\right) \subseteq \ker\left(P_i\right)\right)\right) \tag{4}$$

Da $P_i : V \to V$ für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ eine Projektion ist, gilt dabei:

$$\left(\forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad \ker\left(P_i\right) \cap \operatorname{img}\left(P_i\right) = \{0\}\right)$$

Also gilt:

$$\left(\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} \quad \left(i \neq j \quad \Rightarrow \quad \operatorname{img}\left(P_i\right) \cap \operatorname{img}\left(P_j\right) = \{0\}\right)\right)$$

Damit ist gezeigt:

$$\operatorname{img}\left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{img}\left(P_i\right) \tag{5}$$

Zu zeigen bleibt noch:

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\} \quad \operatorname{img}\left(P_j\right) \subseteq \operatorname{img}\left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right) \tag{6}$$

Beweis hiervon:

Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$.
Dann folgt mit (4):

$$\begin{aligned}\operatorname{img}\left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right) &= \left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right)(V) \supseteq \left(\sum_{i=1}^{k} P_i\right)\left(\operatorname{img}\left(P_j\right)\right) = \\ &= P_j\left(\operatorname{img}\left(P_j\right)\right) = \operatorname{img}\left(P_j \circ P_j\right) = \operatorname{img}\left(P_j\right)\end{aligned}$$

„<=“: Gelte

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{k} P_j \ : \ V \rightarrow V \ \text{ ist eine Projektion und es gilt:} \\ \operatorname{img}\left(\sum_{j=1}^{k} P_j \right) = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{img}\left(P_j\right) \end{array} \right)$$

Zu zeigen ist:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, k\} \quad \left(i \neq j \quad \Rightarrow \quad \operatorname{img}\left(P_i\right) \subseteq \ker\left(P_j\right)\right)$$

Sei $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Sei $u \in \operatorname{img}\left(P_i\right)$.

Da $\sum_{j=1}^{k} P_j$ und P_i Projektionen sind und da $u \in \operatorname{img}\left(\sum_{j=1}^{k} P_j \right) = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{img}\left(P_j\right)$, folgt dann:

$$u = \sum_{j=1}^{k} P_j(u) = u + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{k} P_j(u)$$

und damit:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{k} P_j(u) = 0$$

Wegen $\operatorname{img}\left(\sum_{j=1}^{k} P_j \right) = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{img}\left(P_j\right)$ folgt schliesslich:

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\} \quad \left(i \neq j \quad \Rightarrow \quad \left(P_j(u) = 0\right)\right)$$

5. Projektionen und Tensoren

Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$ mit $r \geq 2$.

Wir definieren nun eine offenbar $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{pr}_1^{r,m} : \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \to \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\mathrm{pr}_1^{r,m} := \mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} + \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m}$$

Dann folgt offenbar:

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}_1^{r,m}(\varphi)\right)\left(v_1, \ldots, v_r\right) :=$$
$$:= \frac{2}{r!} \sum_{\substack{\sigma \in S_r \\ \mathrm{sgn}_r(\sigma)=1}} \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)}\right)$$

Satz:

Beh.: $\mathrm{pr}_1^{r,m} : \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \to \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ ist eine Projektion auf $\underbrace{\mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)}_{=\mathrm{img}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m}\right)} \oplus \underbrace{\mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)}_{=\mathrm{img}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m}\right)}$

Bew.: Zu zeigen ist offenbar nur:

$$\mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \cap \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) = \{0\}$$

Beweis hiervon:

Sei $f \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \cap \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$.

Sei $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m$.
Sei $\tau \in S_r$ definiert durch (Cave! $r \geq 2$):

$$\begin{aligned} \tau : \{1, \dots, r\} &\to \{1, \dots, r\} \\ i &\mapsto \tau(i) := \begin{cases} 2 & i = 1 \\ 1 & i = 2 \\ i & i \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\mathrm{sgn}_r(\tau) = -1$$

Wegen $r \geq 2$ und $f \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ gilt:

$$f\left(v_1, \dots, v_r\right) = \mathrm{sgn}_r(\tau)\, f\left(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}\right)$$

Wegen $r \geq 2$ und $f \in \mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ gilt:

$$f\left(v_1, \dots, v_r\right) = f\left(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(r)}\right)$$

Damit folgt:

$$f\left(v_1, \dots, v_r\right) = 0$$

Wir definieren nun eine offenbar $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathrm{pr}_0^{r,m} : \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \to \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ durch

$$\mathrm{pr}_0^{r,m} \coloneqq \mathrm{id}_{\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)} - \mathrm{pr}_1^{r,m}$$

Satz:

Beh.: $\mathrm{pr}_0^{r,m} : \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \to \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right)$ ist eine Projektion und es gilt:
$\mathrm{pr}_0^{r,m} \circ \mathrm{pr}_1^{r,m} = \mathrm{pr}_1^{r,m} \circ \mathrm{pr}_0^{r,m} = 0$

Bew.: klar nach Sätzen aus 4. und 5.

6. Fazit

Sei $m \in \mathbb{N}_+$.
Sei $r \in \mathbb{N}_+$ mit $r \geq 2$.

Es gelten die folgenden Aussagen:

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{alt}}(\varphi)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) := \\ = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}_r(\sigma)\ \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)$$

und

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{\mathrm{sym}}(\varphi)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) := \\ = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)$$

und

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{1}(\varphi)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) := \\ = \frac{2}{r!} \sum_{\substack{\sigma \in S_r \\ \mathrm{sgn}_r(\sigma)=1}} \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)$$

und

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}\right) \quad \forall v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^m \quad \left(\mathrm{pr}^{r,m}_{0}(\varphi)\right)\left(v_1, \dots, v_r\right) := \\ = \varphi\left(v_1, \dots, v_r\right) - \frac{2}{r!} \sum_{\substack{\sigma \in S_r \\ \mathrm{sgn}_r(\sigma)=1}} \varphi\left(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}\right)$$

Schließlich gilt:

$$\left(\begin{array}{l}\mathrm{pr}_0^{r,m} \text{ und } \mathrm{pr}_1^{r,m} \text{ sind Projektionen und es gilt:} \\ \mathrm{pr}_0^{r,m} \circ \mathrm{pr}_1^{r,m} = \mathrm{pr}_1^{r,m} \circ \mathrm{pr}_0^{r,m} = 0\end{array}\right)$$

und

$$\left(\begin{array}{l}\mathrm{pr}_0^{r,m},\ \mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} \text{ und } \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m} \text{ sind Projektionen und es gilt:} \\ \mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} \circ \mathrm{pr}_0^{r,m} = \mathrm{pr}_0^{r,m} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} = 0 \qquad \text{und} \\ \mathrm{pr}_0^{r,m} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m} = \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m} \circ \mathrm{pr}_0^{r,m} = 0 \qquad \text{und} \\ \mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m} = \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m} \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} = 0\end{array}\right)$$

und

$$r = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{pr}_0^{r,m} = 0$$

und

$$\mathrm{id}_{\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)} = \mathrm{pr}_0^{r,m} + \mathrm{pr}_1^{r,m} = \mathrm{pr}_0^{r,m} + \left(\mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m} + \mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m}\right)$$

und

$$\mathfrak{L}^r\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right) = \mathrm{img}\left(\mathrm{pr}_0^{r,m}\right) \oplus \underbrace{\mathfrak{L}^r_{\mathrm{alt}}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)}_{=\mathrm{img}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{alt}}^{r,m}\right)} \oplus \underbrace{\mathfrak{L}^r_{\mathrm{sym}}\left(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}\right)}_{=\mathrm{img}\left(\mathrm{pr}_{\mathrm{sym}}^{r,m}\right)}$$