Verallgemeinertes Vektorprodukt

Christian Reinbothe
Sudermanplatz 8 – 10

50670 Köln
Germany

mailto:Christian.Reinbothe@T-Online.DE
http://WWW.Reinbothe.DE

1. Definition $\mathcal{L}^k(V, W)$

Def. Seien V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume.
Sei $k \in \mathbb{N}_+$.
Wir definieren einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{L}^k(V, W)$ durch

$$\mathcal{L}^k(V, W) := \left\{ f : V^k \to W \ k - \text{fach multilinear} \right\}$$

2. Definition V^*

Def. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Wir definieren einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V^* durch

$$V^* := \mathcal{L}^1(V, \mathbb{R})$$

3. Isomorphismus V To V^*

Theo.

Vor. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Sei $< \ldots ; \ldots >: \ V \times V \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf V.

Beh. Dia Abbildung

$$\begin{array}{ccc} V & \to & V^* \\ w & \mapsto & (< w ; \ldots >: \ V \to \mathbb{R}) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

4. Verallgemeinerung von 3.

Theo.

Vor. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Sei $< \ldots ; \ldots >: \ V \times V \to \mathbb{R}$ ein inneres Produkt auf V.
Sei $k \in \mathbb{N}_+$.

Beh. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^k(V, V) &\to \mathcal{L}^{k+1}(V, \mathbb{R}) \\ \Theta &\mapsto \begin{pmatrix} V \times \ldots \times V & \to \mathbb{R} \\ (X_1, \ldots, X_{k+1}) & \mapsto < \Theta(X_1, \ldots, X_k) ; X_{k+1} > \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

Die inverse Abbildung:

Setze $n := \dim(V)$ und gelte $n \in \mathbb{N}_+$.
Sei $E_1, \ldots, E_n \in V$ eine Orthonormalbasis von $(V, < \ldots ; \ldots >)$.
Sei $\vartheta \in \mathcal{L}^{k+1}(V, \mathbb{R})$.
Wir definieren $\Theta \in \mathcal{L}^k(V, V)$ durch

$$\forall X_1, \ldots, X_n \in V \quad \Theta(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{i=1}^{n} \vartheta(X_1, \ldots, X_n, E_i) \cdot E_i$$

Für dieses Θ gilt das Folgende:

$$\begin{aligned} \forall X_1, \ldots, X_{n+1} \in V \quad & < \Theta(X_1, \ldots, X_n) ; X_{n+1} >= \\ &=< \sum_{i=1}^{n} \left(\vartheta(X_1, \ldots, X_n, E_i) \cdot E_i \right) ; X_{n+1} >= \\ &= \vartheta\left(X_1, \ldots, X_n, \sum_{i=1}^{n} < E_i ; X_{n+1} > \cdot E_i \right) = \\ &= \vartheta(X_1, \ldots, X_{n+1}) \end{aligned}$$

Beobachtung 1:

Wenn $\vartheta \in \mathcal{L}^{k+1}(V, \mathbb{R})$ alternierend ist, so ist auch $\Theta \in \mathcal{L}^{k}(V, V)$ alternierend.

Beobachtung 2:

Sei $\chi : \mathcal{L}^{k}(V, V) \to \mathcal{L}^{k+1}(V, \mathbb{R})$ dieser Isomorphismus.
Sei $f \in \mathcal{L}^{1}(V, V)$.
Sei $f^{t} \in \mathcal{L}^{1}(V, V)$ die zu f adjungierte Abbildung in $(V, < \ldots ; \ldots >)$.
Dann gilt das Folgende:

$$\begin{aligned}
\forall \Theta \in \mathcal{L}^{k}(V, V) \quad \forall X_1, \ldots, X_{n+1} \in V \quad (\chi(f \circ \Theta))\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right) &= \\
&=< f\left(\Theta\left(X_1, \ldots, X_n\right)\right) ; X_{n+1} >= \\
&=< \Theta\left(X_1, \ldots, X_n\right) ; f^{t}\left(X_{n+1}\right) >= \\
&= (\chi(\Theta))\left(X_1, \ldots, X_n, f^{t}\left(X_{n+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Dieses Verhalten von χ wird als "kontravariant" (an der $(n+1)$ten Stelle) bezeichnet.

Ein $\tilde{\chi} : \mathcal{L}^{k}(V, V) \to \mathcal{L}^{k+1}(V, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned}
\forall \Theta \in \mathcal{L}^{k}(V, V) \quad \forall X_1, \ldots, X_{n+1} \quad (\tilde{\chi}(f \circ \Theta))\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right) &= \\
&= (\tilde{\chi}(\Theta))\left(X_1, \ldots, X_n, f\left(X_{n+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

wird mit "kovariant" (an der $(n+1)$ten Stelle) bezeichnet.

5. Verallgemeinertes Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$

Theo.

Vor. Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Sei $< \ldots ; \ldots >: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ das innere Standardprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beh. Es existiert genau eine Abbildung

$$\Theta : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n+1}}_{n-\text{fach}} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

mit

$$\forall X_1, \ldots, X_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \quad < \Theta\left(X_1, \ldots, X_n\right); X_{n+1} > = \det\left(X_1, \ldots, X_{n+1}\right)$$

Bem. Für den Beweis benötigt man 3. und das Auswahlaxiom.

Bem. In der Literatur findet man auch

$$\forall X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \Theta\left(X_1, \ldots, X_n\right) = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$$

Bem. Für $n = 2$ ist $\Theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das bekannte Vektorprodukt $\ldots \times \ldots$ auf $\mathbb{R}^3$.

Bem. $\Theta : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n+1}}_{n-\text{fach}} \to \mathbb{R}^{n+1}$ ist n – fach multilinear und alternierend.