1. Was bedeutet „kanonisch“?

1.1. Definition nach [1]

Def. I: Ein Begriff unter einer Anzahl gleichartiger Begriffe heißt kanonisch, wenn er eine besonders große Bedeutung und eine besonders durchsichtige Gestalt hat.

1.2. Definition nach [3]

Def. II: kanonisch, einer gegebenen Situation oder Problemstellung am besten angepasst

1.3. Definition nach [4]

Def.: III kanonisch, auf natürliche Weise logisch ausgezeichnet

2. Probleme mit der „kanonischen“ Basis des $\mathbb{R}^2$

2.1. These

Die Standardbasis $\mathfrak{B} := \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ des $\mathbb{R}^2$ ist in keiner Weise gegenüber der Basis $\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ des $\mathbb{R}^2$ logisch ausgezeichnet. $\mathfrak{B}$ ist im Sinne der Definitionen I, II und III **nicht „kanonisch“**, sondern **willkürlich**.

2.2. Ein Einwand?

Es gilt aber doch $\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 1 \neq -1 = \det\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$?

2.3. Lösung

Die Definition von $\det(\ldots)$ ist auch **nicht „kanonisch“**, sondern **willkürlich**. Es gilt:

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{\pi\in S(n)} \left(\operatorname{sgn}(\pi) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right) \right)$$

Die **Willkür** in dieser Definition ist die Richtung, in der die Matrix gelesen wird. Es wäre genauso möglich, eine andere Determinante $\widetilde{\det}(\ldots)$ wie folgt zu definieren:

$$\widetilde{\det}\begin{pmatrix} a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix} := \sum_{\pi\in S(n)} \left(\operatorname{sgn}(\pi) \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\pi(i)} \right) \right)$$

Mit dieser $\widetilde{\det}(\ldots)$ gilt dann nämlich:

$$\widetilde{\det}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -1 \neq 1 = \widetilde{\det}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Die These 2.1. wird also bestätigt.

2.4. Ein Versuch

Man könnte auf die Idee kommen, den Begriff „„**kanonische**“ Basis des $\mathbb{R}^2$“ wie folgt zu definieren:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad \left(\begin{array}{l} \big((v, w) \text{ ist die kanonische Basis des } \mathbb{R}^2 \big) \quad :\Leftrightarrow \\ \left(\left(v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \wedge \quad \left(w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \end{array} \right)$$

Aber das ist **willkürlich**, denn man könnte genauso gut den Begriff „„**kanonische**“ Basis des $\mathbb{R}^2$“ anders definieren:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad \left(\begin{array}{l} \big((v, w) \text{ ist die kanonische Basis des } \mathbb{R}^2 \big) \quad :\Leftrightarrow \\ \left(\left(v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \wedge \quad \left(w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \end{array} \right)$$

Das Einzige, dass möglich ist, ist den Begriff der „Standard-Basis des $\mathbb{R}^2$“ zu definieren:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad \left(\begin{array}{l} \big((v, w) \text{ ist die Standard-Basis des } \mathbb{R}^2 \big) \quad :\Leftrightarrow \\ \left(\left(v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \wedge \quad \left(w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \end{array} \right)$$

Die „Standard-Basis des $\mathbb{R}^2$“ ist **nicht „kanonisch“**, sondern **willkürlich** definiert. Mit anderen Worten:

Die Wahl der „Standard-Basis des $\mathbb{R}^2$“ ist **günstig**, aber **nicht zwingend.**

3.1. Das neutrale Element einer Gruppe G mit $\#G \geq 2$ ist nicht „kanonisch"

Sei G eine Menge mit $\# G \geq 2$ und sei $(G; \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Es wird gezeigt werden, dass jedes $\vartheta \in G$ Anlass gibt zu einer Gruppe $(G; \odot)$, die mit $(G; \cdot)$ verwandt ist und deren neutrales Element ϑ ist.

Sei also $\vartheta \in G$ und $\odot : \; G \times G \to G$ definiert durch

$$\forall a, b \in G \quad a \odot b := a \cdot \vartheta^{-1} \cdot b \tag{*}$$

Sei weiterhin die Abbildung $\varphi : \; G \to G$ definiert durch

$$\forall a \in G \quad \varphi(a) := \vartheta \cdot a^{-1} \cdot \vartheta \tag{**}$$

Aus (*) und (**) folgt dann offenbar:

$$\forall a, b, c \in G \quad a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c \tag{1}$$

$$\forall a \in G \quad a \odot \vartheta = a = \vartheta \odot a \tag{2}$$

$$\forall a \in G \quad a \odot \varphi(a) = \vartheta = \varphi(a) \odot a \tag{3}$$

Damit ist offenbar gezeigt, dass $(G; \odot)$ eine Gruppe mit neutralem Element ϑ ist. Ausserdem ist $\varphi : \; G \to G$ die Inversenbildung von $(G; \odot)$. Schliesslich gilt es, die Verwandschaft von $(G; \odot)$ und $(G; \cdot)$ aufzuzeigen. Es gilt nämlich:

$$\forall a, b \in G \quad a \cdot b = a \odot \varphi(e) \odot b \tag{4}$$

Fazit:

Wegen $\# G \geq 2$ ist das neutrale Element $e \in G$ von $(G; \cdot)$ **nicht „kanonisch"**.

3.2. Das erzeugende Element einer zyklischen Gruppe G mit $\#G \geq 2$ ist nicht „kanonisch"

Sei G eine Menge mit $\# G \geq 2$ und sei $(G; \cdot)$ eine zyklische Gruppe mit erzeugendem Element $\omega \in G$. Es wird gezeigt werden, dass jedes $g \in G$ Anlass gibt zu einer zyklischen Gruppe $(G; \odot)$, die mit $(G; \cdot)$ verwandt ist und von der g ein erzeugendes Element ist.

Sei also $g \in G$. Dann existiert $k \in \{1, \dots, \# G\}$ mit

$$g = \omega^k \tag{1}$$

Wir definieren dann $l \in \{0, \dots, \# G - 1\}$ und $\vartheta \in G$ durch

$$l = k - 1 \quad \text{und} \quad \vartheta = \omega^l \tag{2}$$

Sei $\odot : \ G \times G \to G$ definiert wie in 3.1.(*), d. h.

$$\forall a, b \in G \quad a \odot b := a \cdot \vartheta^{-1} \cdot b \tag{3}$$

Dann gilt nach 3.1.(1) - 3.1.(3):

$$(G; \odot) \text{ ist eine Gruppe mit neutralem Element } \vartheta \tag{4}$$

Dabei gilt nach (1), (2) und (3):

$$\forall m \in \{1, \dots, \# G\} \quad \bigodot_{i=1}^{m} g = g^m \; \vartheta^{-(m-1)} = \omega^{mk-(m-1)l} \tag{5}$$

Dann bleibt nur noch zu zeigen, daß $(G; \odot)$ eine zyklische Gruppe ist und daß $g \in G$ ein erzeugendes Element von $(G; \odot)$ ist. Dazu genügt es wegen (4) zu zeigen, daß gilt:

$$\forall n \in \{1, \dots, \# G\} \quad \left(\vartheta = \bigodot_{i=1}^{n} g \quad \Rightarrow \quad n = \# G \right) \tag{6}$$

Beweis von (6):

Sei $n \in \{1, \dots, \# G\}$ mit $\vartheta = \bigodot_{i=1}^{n} g$. Wegen (2), und (5) folgt dann:

$$\omega^l = \vartheta = \omega^{nk-(n-1)l} = \omega^{nk-nl+l}$$

Sei nun $e \in G$ das neutrale Element von $(G; \cdot)$. Dann folgt mit (2):

$$e = \omega^l \; \omega^{\# G-l} = \omega^{nk-nl+l+\# G-l} = \omega^{nk-nl} = \omega^{n(k-l)} = \omega^n$$

Da $\omega \in G$ ein erzeugedes Element von $(G; \cdot)$ ist, folgt schließlich:

$$n = \# G$$

Fazit:

Wegen 3.1.(4) und $\# G \geq 2$ ist das erzeugende Element $\omega \in G$ von $(G; \cdot)$ **nicht „kanonisch"**.

4. Dualräume

4.1. Benötigte Definitionen

Def.: Sei $n \in \mathbb{N}_+$.
Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1. Wir definieren dann

$$V^\star := \{f : V \to \mathbb{R} : \; f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\}$$

Offenbar gilt:

$$V^\star \text{ ist ein } n\text{-dimensionaler } \mathbb{R}\text{-Vektorraum}$$

$V^\star$ heißt der Dualraum von V.

2. Sei $\|...\|$ eine Norm auf V.
Wir definieren dann eine Norm $\|...\|_\star$ auf $V^\star$ durch

$$\forall f \in V^\star \quad \|f\|_\star := \underbrace{\sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|} : \; x \in V \;\wedge\; x \neq 0\right\}}_{=\sup\{|f(x)|:\; x\in V \;\wedge\; \|x\|=1\}}$$

$\|...\|_\star$ heißt die von $\|...\|$ auf $V^\star$ induzierte Operatornorm.

3. Sei $< \ldots ; \ldots >$ ein Skalarprodukt auf V. Wir definieren dann eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\Theta_{<\ldots;\ldots>,V} \; : \; V \to V^{\star}$ durch

$$\forall x \in V \quad \Theta_{<\ldots;\ldots>,V}(x) := < x; \ldots >$$

Durch $< \ldots ; \ldots >$ wird eine Norm $\|\ldots\|$ auf V induziert. Dabei gilt:

$$\forall x \in V \quad \|x\| = \sqrt{< x; x >}$$

und

$$\Theta_{<\ldots;\ldots>,V} \; : \; (V, \|\ldots\|) \to \left(V^{\star}, \|\ldots\|_{\star}\right)$$

ist eine $\mathbb{R}$-lineare Isometrie von **normierten** $\mathbb{R}$-Vektorräumen

4. Nach 1. und 2. sind dann $V^{\star\star} = \left(V^{\star}\right)^{\star}$ und $\|\ldots\|_{\star\star} = \left(\|\ldots\|_{\star}\right)_{\star}$ ebenfalls definiert.

$V^{\star\star}$ heißt der Bidualraum von V.

5. Wir definieren eine Abbildung $Q_V \; : \; V \to V^{\star\star}$ durch

$$\forall x \in V \;\; Q_V(x) := \underbrace{\begin{pmatrix} V^{\star} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}}_{\in V^{\star\star}}$$

Dann gilt nach [2]:

$$Q_V \; : \; V \to V^{\star\star} \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear und bijektiv}$$

Außerdem gilt nach [2] für jede Norm $\|\ldots\|$ auf V:

$$Q_V \; : \; (V, \|\ldots\|) \to \left(V^{\star\star}, \|\ldots\|_{\star\star}\right)$$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Isometrie von **normierten** $\mathbb{R}$-Vektorräumen

4.2. Hauptsatz I

Hauptsatz:

Vor.:

Sei $< \ldots ; \ldots >$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Sei $\| \ldots \|$ die durch $< \ldots ; \ldots >$ auf $\mathbb{R}^2$ induzierte Norm.

Sei $\Theta : \left(\mathbb{R}^2, \| \ldots \| \right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2 \right)^*, \| \ldots \|_* \right)$ eine $\mathbb{R}$-lineare Isometrie von normierten $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \left(\mathbb{R}^2 \right)^*$ eine Abbildung.

Beh.:

$$\left(\begin{array}{l} \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \| \ldots \| \right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2 \right)^*, \| \ldots \|_* \right) \\ \text{ist eine } \mathbb{R}\text{-lineare Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen} \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Phi \in \left\{ f : \mathbb{R}^2 \to \left(\mathbb{R}^2 \right)^* : \left(\begin{array}{l} \text{Es existiert eine} \\ \mathbb{R}\text{-lineare Isometrie} \\ g : \left(\mathbb{R}^2, \| \ldots \| \right) \to \left(\mathbb{R}^2, \| \ldots \| \right) \\ \text{mit } f = \Theta \circ g \end{array} \right) \right\}$$

Es gilt:

$$\left(\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2} : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2\right)^*, \|\ldots\|_*\right) \text{ ist eine } \atop \mathbb{R}\text{-lineare Isometrie von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\right)$$

und

$$\left(\left(-\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2}\right) : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2\right)^*, \|\ldots\|_*\right) \text{ ist eine } \atop \mathbb{R}\text{-lineare Isometrie von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\right)$$

und

$$\left(-\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2}\right) = \left(\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2}\right) \circ \left(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\right)$$

und

$$\left(\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2}\right) = \left(-\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2}\right) \circ \left(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\right)$$

und

$$\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2} \neq -\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2}$$

Damit ist klar:

$\Theta_{<\ldots;\ldots>,\mathbb{R}^2}$ ist **nicht „kanonisch"**

4.3. Hauptsatz II

Hauptsatz:

Vor.: Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \left(\mathbb{R}^2\right)^{**}$ eine Abbildung.

Beh.:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Für jede Norm } \|...\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|...\|\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2\right)^{**}, \|...\|_{**}\right) \\ \text{ist eine } \mathbb{R}\text{-lineare Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Phi \in \left\{Q_{\mathbb{R}^2}, -Q_{\mathbb{R}^2}\right\}$$

Bew.: ausgelassen

Es gilt:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:}\\ Q_{\mathbb{R}^2} : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2\right)^{**}, \|\ldots\|_{**}\right) \text{ ist eine } \mathbb{R}\text{-lineare}\\ \text{Isometrie von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right)$$

und

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:}\\ \left(-Q_{\mathbb{R}^2}\right) : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2\right)^{**}, \|\ldots\|_{**}\right) \text{ ist eine } \mathbb{R}\text{-lineare}\\ \text{Isometrie von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right)$$

und

$$\left(-Q_{\mathbb{R}^2}\right) = \left(Q_{\mathbb{R}^2}\right) \circ \left(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\right)$$

und

$$\left(Q_{\mathbb{R}^2}\right) = \left(-Q_{\mathbb{R}^2}\right) \circ \left(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\right)$$

und

$$Q_{\mathbb{R}^2} \neq -Q_{\mathbb{R}^2}$$

Damit ist klar:

$Q_{\mathbb{R}^2}$ ist **nicht „kanonisch“**

5. Literaturverzeichnis

[1] „Der große Brockhaus“ (16. Auflage)
F. A. Brockhaus Wiesbaden 1955

[2] Graduate Texts in Mathematics 96
John B. Conway, „A Course in Functional Analysis“
Second Edition
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[3] „Lexikon der Mathematik“
Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg 2001

[4] Vorlesungen über Mathematik 1987 - 1993
Universität zu Köln