Lemma: I

Vor.: Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.
Sei $<...;...>$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Beh.: Φ ist eine Isometrie von $\left(\mathbb{R}^2, < ... ; ... >\right)$ $\Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Es existiert eine Orthonormalbasis von } \left(\mathbb{R}^2, < ... ; ... >\right) \\ \text{bezüglich derer die Matrix von } \Phi \text{ eine der folgenden} \\ \text{Gestalten annimmt:} \\ \text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\ \quad \text{wobei } \vartheta \in [0; 2\pi[\end{array}\right)$$

Bew.:

„$\Rightarrow$“: Sei Φ eine Isometrie von $\left(\mathbb{R}^2, < ... ; ... >\right)$.
Da $\left(\mathbb{R}^2, < ... ; ... >\right)$ ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, existiert nach [4] eine Orthonormalbasis $\left(e_1, e_2\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ von $\left(\mathbb{R}^2, < ... ; ... >\right)$.
Da Φ eine Isometrie von $\left(\mathbb{R}^2, < ... ; ... >\right)$ ist, gilt:

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad < u; u > = < \Phi(u); \Phi(u) > \tag{1}$$

Aus (1) folgt offenbar:

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ ist bijektiv} \tag{2}$$

und

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad < v; w > = < \Phi(v); \Phi(w) > \tag{3}$$

Da $(e_1, e_2) \in (\mathbb{R}^2)^2$ eine Basis von $(\mathbb{R}^2, < \ldots ; \ldots >)$ ist, existieren nach [4] $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(e_1) = ae_1 + ce_2 \quad \text{und} \quad \Phi(e_2) = be_1 + de_2$$

d.h. nach (2)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Die Matrix } A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ ist die} \\ \text{zu der Basis } (e_1, e_2) \text{ gehörige Matrix} \\ \text{der linearen Isometrie } \Phi. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Nun gilt nach [4]:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Es existiert genau eine lineare Abbil-} \\ \text{dung } \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ mit der Eigenschaft} \\ \forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad < \Phi(v) ; w > = < v ; \varphi(w) > \end{array}\right\} \tag{5}$$

Da $(e_1, e_2) \in (\mathbb{R}^2)^2$ eine Orthonormalbasis ist, gilt nach [4] und (5):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Die Matrix } A^t := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ ist die} \\ \text{zu der Basis } (e_1, e_2) \text{ gehörige Matrix der} \\ \text{linearen Abbildung } \varphi. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Andererseits gilt wegen (2) und (4):

$$0 \neq \det(A) = ad - bc \in \mathbb{R} \tag{7}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \text{Die Matrix } A^{-1} := \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ \text{ist die zu der Basis } (e_1, e_2) \text{ gehörige} \\ \text{Matrix der linearen Abbildung } \Phi^{-1}. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Nun gilt aber nach (3):

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad < v; \Phi^{-1}(w) > = < \Phi(v); \Phi\left(\Phi^{-1}(w)\right) >$$

bzw.

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad < v; \Phi^{-1}(w) > = < \Phi(v); w >$$

Dann folgt durch (4), (5), (6) und (8):

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \Phi^{-1} \text{ und } A^t = A^{-1} \\ 1 = \det\left(AA^{-1}\right) = \det\left(AA^t\right) = \left(\det(A)\right)^2 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Hiermit folgt schließlich mit (7):

$$\det(A) \in \{1, -1\} \tag{10}$$

1. Fall: $\det(A) = -1$

Dann folgt aus (6), (8) und (9):

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^t = A^{-1} = (-1)\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

bzw.

$$a = -d \text{ und } b = c \tag{*}$$

Sei $I_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix. Wir definieren dann das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ von A durch

$$\chi_A(\lambda) := \det\left(A - \lambda I_2\right)$$

Dann folgt durch (4):

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\chi_A(\lambda) = ad - bc - (a + d)\lambda + \lambda^2$$

Schließlich erhält man aus $\det(A) = -1$, (7) und (*):

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Wir definieren dann $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ durch $\lambda_1 := 1$ und $\lambda_2 := -1$. Es gilt dann:

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \chi_A(\lambda_i) = 0$$

d.h. λ_1, λ_2 sind Eigenwerte von A

Dann existieren nach [4] $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad v_i \neq 0$$
$$\forall i \in \{1, 2\} \quad < v_i ; v_i > = 1$$

und

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad Av_i = \lambda_i v_i$$

d.h. v_1, v_2 sind Eigenvektoren von A

Damit gilt auch:

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \Phi(v_i) = \lambda_i v_i$$

Nach (3) folgt:

$$< v_1 ; v_2 > \; = \; < \Phi(v_1) ; \Phi(v_2) >$$

Damit erhält man:

$$< v_1 ; v_2 > \; = \; \lambda_1 \lambda_2 < v_1 ; v_2 >$$

Wegen $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ folgt:

$$< v_1 ; v_2 > = 0$$

Dann ist (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, < \ldots ; \ldots >)$ und es folgt:

Die Matrix $\widetilde{A} := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist die zu der Basis (v_1, v_2) gehörige Matrix der linearen Isometrie Φ.

2. Fall: $\det(A) = 1$
Dann folgt aus (6), (8) und (9):

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^t = A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

bzw.

$$a = d \text{ und } b = -c \tag{**}$$

Wegen $\det(A) = 1$ folgt dann aus (7):

$$1 = ad - bc = a^2 + c^2$$

Dann existiert nach [4] $\vartheta \in [0, 2\pi[$ mit

$$a = \cos(\vartheta) \text{ und } c = \sin(\vartheta)$$

Damit gilt nach (4) und (**):

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

„$\Leftarrow$“: Sei also $(e_1, e_2) \in (\mathbb{R}^2)^2$ eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, < \dots ; \dots >)$. Ferner sei $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und es gelte

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

oder

b) $\exists \vartheta \in [0, 2\pi[\quad A = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

Ferner sei A die zu der Basis (e_1, e_2) gehörige Matrix der $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dann gilt zu-ächst:

$$A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ und } A^t = A^{-1} \tag{1}$$

Da (e_1, e_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^2, < \dots ; \dots >)$ ist, gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Für die bezüglich } (e_1, e_2) \text{ zu } A^t \text{ gehörige} \\ \text{lineare Abbildung } \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad < \Phi(v) ; w > \; = \; < v ; \varphi(w) > \end{array}\right\} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann offenbar:

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^2 \quad < \Phi(v) ; w > \; = \; < v ; \Phi^{-1}(w) >$$

bzw.

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad < \Phi(v) ; \Phi(v) > \; = \; < v ; \Phi^{-1}(\Phi(v)) >$$

bzw.

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \quad < \Phi(v) ; \Phi(v) > \; = \; < v ; v >$$

Damit ist gezeigt:

Φ ist eine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, < \dots ; \dots >)$

Lemma: **II**

Vor.: Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Beh.:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:}\\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \text{ ist eine Isometrie}\\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Es existiert kein Skalarprodukt } <\ldots;\ldots> \text{ auf } \mathbb{R}^2\\ \text{und keine Orthonormalbasis von } \left(\mathbb{R}^2, <\ldots;\ldots>\right) \text{ be-}\\ \text{züglich derer die Matrix von } \Phi \text{ die folgende Ge-}\\ \text{stalt annimmt:}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

Bew.: Durch Widerspruch:

Es gelte also:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:}\\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \text{ ist eine Isometrie}\\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right) \tag{1}$$

Ferner sei $<\ldots;\ldots>$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und sei $\left(e_1, e_2\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ eine Orthonormalbasis von $\left(\mathbb{R}^2, <\ldots;\ldots>\right)$ und es gelte:

$$\Phi\left(e_1\right) = e_1 \text{ und } \Phi\left(e_2\right) = -e_2 \tag{2}$$

Wir definieren dann zunächst eine Basis $\left(v_1, v_2\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ von $\left(\mathbb{R}^2, <\ldots;\ldots>\right)$ durch

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 + e_2\right) \text{ und } v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e_1 - e_2\right)$$

(3)

Dann gilt offenbar:

$$\left.\begin{array}{l}\left(v_1, v_2\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2 \text{ ist eine Orthonormalbasis} \\ \text{von } \left(\mathbb{R}^2, < \ldots ; \ldots >\right)\end{array}\right\} \tag{4}$$

und

$$\Phi\left(v_1\right) = v_2 \text{ und } \Phi\left(v_2\right) = v_1 \tag{5}$$

Wir definieren nun eine Norm $\|\ldots\|_1$ auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \|u\|_1 := \frac{1}{2}\left|< u; v_1 >\right| + 2\left|< u; v_2 >\right| \tag{6}$$

Dann gilt:

$$\left\|v_1\right\|_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \left\|v_2\right\|_1 = 2 \tag{7}$$

(1), (5) und (7) widersprechen einander!

Lemma: **III**

Vor.: Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.
Sei $< \ldots ; \ldots >$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und
sei $\left(e_1, e_2\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ eine Orthonormalbasis von $\left(\mathbb{R}^2, < \ldots ; \ldots >\right)$.
Sei $\vartheta \in [0, 2\pi[$ und sei $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ die bezüglich $\left(e_1, e_2\right)$ zu Φ gehörige Matrix.

Beh.: $\left(\begin{array}{l} \text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \text{ ist eine Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen} \end{array}\right) \Rightarrow$

$\vartheta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\}$

Bew.: Es gelte also:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \text{ ist eine Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen} \end{array}\right) \tag{1}$$

Wir definieren dann eine Norm $\|\ldots\|_1$ auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \|u\|_1 := \max\left\{\left|< u ; e_1 >\right|, \left|< u ; e_2 >\right|\right\} \tag{2}$$

Dann gilt zunächst:

$$\left\|e_1\right\|_1 = 1 \quad \text{und} \quad \left\|e_2\right\|_1 = 1 \tag{3}$$

Andererseits gilt aber auch:

$$\left\|\Phi\left(e_1\right)\right\|_1 = \left\|\Phi\left(e_2\right)\right\|_1 = \max\left\{\left|\cos(\vartheta)\right|, \left|\sin(\vartheta)\right|\right\} \tag{4}$$

Wegen (1) folgt aus (3) und (4):

$$1 = \max\{|\cos(\vartheta)|, |\sin(\vartheta)|\} \tag{5}$$

Wegen $\vartheta \in [0, 2\pi[$ folgt hieraus offenbar:

$$\vartheta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\} \tag{6}$$

Lemma: **IV**

Vor.: Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.
Sei $< \ldots ; \ldots >$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und
sei $\left(e_1, e_2\right) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^2$ eine Orthonormalbasis von $\left(\mathbb{R}^2, < \ldots ; \ldots >\right)$.
Sei $\vartheta \in [0, 2\pi[$ und sei $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ die bezüglich $\left(e_1, e_2\right)$ zu Φ gehörige Matrix.

Beh.: $\left(\begin{array}{l} \text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \text{ ist eine Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen} \end{array}\right) \Rightarrow$

$\vartheta \in \{0, \pi\}$

Bew.: Es gelte also:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \text{ ist eine Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen} \end{array}\right) \tag{1}$$

Nach Lemma III folgt dann:

$$\vartheta \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right\} \tag{2}$$

Dann ist nur noch zu zeigen:

$$\vartheta \in \{0, \pi\} \tag{3}$$

Beweis hiervon:

Ann.: $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ (4)

Dann existiert $\alpha \in \{1, -1\}$, sodaß $\alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die bezüglich (e_1, e_2) zu Φ gehörige Matrix ist. Dann gilt:

$$\Phi(e_1) = \alpha e_2 \text{ und } \Phi(e_2) = -\alpha e_1 \tag{5}$$

Wir definieren nun eine Norm $\|\ldots\|_1$ auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \quad \|u\|_1 := \frac{1}{2}|< u; e_1 >| + 2|< u; e_2 >| \tag{6}$$

und

$$\|e_1\|_1 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \|e_2\|_1 = 2 \tag{7}$$

(1), (5) und (7) widersprechen einander!

Lemma: **V (Konsequenz von Lemma I, II, III und IV)**

Vor.: Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Beh.:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|...\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \left(\mathbb{R}^2, \|...\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|...\|\right) \text{ ist eine Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Phi \in \left\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\right\}$$

Beweis von 4.3.

Offenbar ist nur zu zeigen:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \quad \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2\right)^{**}, \|\ldots\|_{**}\right) \text{ ist eine Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Phi \in \left\{Q_{\mathbb{R}^2}, -Q_{\mathbb{R}^2}\right\}$$

Beweis hiervon:

Gelte also:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \Phi : \quad \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^2\right)^{**}, \|\ldots\|_{**}\right) \text{ ist eine Isometrie} \\ \text{von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right) \tag{1}$$

Hieraus folgt:

$$\left(\begin{array}{l}\text{Für jede Norm } \|\ldots\| \text{ auf } \mathbb{R}^2 \text{ gilt:} \\ \left(\left(Q_{\mathbb{R}^2}\right)^{-1} \circ \Phi\right) : \quad \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|\right) \text{ ist eine} \\ \text{Isometrie von normierten } \mathbb{R}\text{-Vektorräumen}\end{array}\right) \tag{2}$$

Dann folgt nach Lemma V:

$$\left(\left(Q_{\mathbb{R}^2}\right)^{-1} \circ \Phi\right) \in \left\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, -\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\right\} \tag{3}$$

Dann existiert also $a \in \{1, -1\}$ mit

$$\left(Q_{\mathbb{R}^2}\right)^{-1} \circ \Phi = a \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \tag{4}$$

Da $Q_{\mathbb{R}^2}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist, folgt hiermit:

$$\underbrace{Q_{\mathbb{R}^2} \circ \left(Q_{\mathbb{R}^2}\right)^{-1}}_{=\mathrm{id}_{\left(\mathbb{R}^2\right)^{**}}} \circ \Phi = a \cdot Q_{\mathbb{R}^2} \tag{5}$$

Wegen $a \in \{1, -1\}$ folgt damit:

$$\Phi \in \left\{Q_{\mathbb{R}^2}, -Q_{\mathbb{R}^2}\right\} \tag{6}$$