1. Hilfsmittel

Def.: Sei J ein nicht leeres Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Wir definieren dann:

1. $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn
   $\forall x, y \in J \quad \forall t \in [0; 1] \quad \phi(tx + (1-t)y) \le t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$

2. Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
   $\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex genau dann, wenn
   $\ln(\phi) : J \to \mathbb{R}$ konvex ist.

Bem.: Gelte $\phi(J) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Da $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend ist, folgt:

($\phi : J \to \mathbb{R}$ ist logarithmisch konvex) $\Rightarrow$
($\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex)

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung.

Beh.: ($\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex) $\Leftrightarrow$
($\phi' : J \to \mathbb{R}$ ist monoton steigend)

Satz:

Vor.: Sei J ein nicht leeres offenes Intervall von $\mathbb{R}$.
Sei $\phi : J \to \mathbb{R}$ eine 2-mal differenzierbare Abbildung.

Beh.: ($\phi : J \to \mathbb{R}$ ist konvex) $\Leftrightarrow$
$\phi'' \ge 0$

2. Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ durch das absolut konvergente Integral

$$\Gamma(\alpha) := \underbrace{\int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \cdot e^{-\tau} \, d\tau}_{>0}$$

definiert und es gilt:

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist analytisch} \tag{1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \tag{2}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \Gamma(k + 1) = k! \tag{3}$$

$$\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist logarithmisch konvex (also auch konvex)} \tag{4}$$

$$\Gamma(1) = 1 \text{ und } \Gamma(2) = 1 \tag{5}$$

Mit (4) und (5) folgt offenbar:

$$\Gamma \mid [2; \infty[\text{ ist monoton steigend} \tag{6}$$

Wir definieren nun eine Funktion $\gamma :]-1;\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\forall u \in]-1; \infty[\quad \gamma(u) := \Gamma(u + 1)$$

Dann folgt mit (2):

$$\forall v \in]-1; \infty[\quad \gamma(v + 1) = (v + 1)\,\gamma(v) \tag{7}$$

Außerdem folgt mit (6):

$$\gamma \mid [1; \infty[\text{ ist monoton steigend} \tag{8}$$

3. Betrachtung der ln-Funktion

Sei $J :=]0;1[$
Wir definieren eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall t \in J \quad f(t) := \ln(1-t)$$

Nach Analysis gilt dann:

$f : J \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar

$$\forall t \in J \quad f'(t) = -\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$\forall t \in J \quad f(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} t^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)!} t^{n+1}$$

Weiter definieren wir für $\tilde{\alpha} \in]-1;\infty[$ die Funktion $l_{\tilde{\alpha}} : J \to \mathbb{R}$ durch

$$\forall t \in J \quad l_{\tilde{\alpha}}(t) := -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(n+\tilde{\alpha})}{\gamma(n+\tilde{\alpha}+1)} t^{n+\tilde{\alpha}+1}$$

Dann folgt offenbar für alle $\tilde{\alpha} \in]-1;\infty[$:

$l_{\tilde{\alpha}} : J \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert und differenzierbar

und es gilt

$$\begin{aligned}\forall t \in J \quad \left(l_{\tilde{\alpha}}\right)'(t) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(n+\tilde{\alpha})}{\gamma(n+\tilde{\alpha}+1)} \left(x^{n+\tilde{\alpha}+1}\right)'(t) = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+\tilde{\alpha}} = \\ &= \left(-\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) t^{\tilde{\alpha}} = \\ &= \frac{t^{\tilde{\alpha}}}{t-1}\end{aligned}$$

4. Literaturverzeichnis

[1] Jürgen Neukirch
„Algebraische Zahlentheorie“
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[2] Wolfgang Walter
„Gewöhnliche Differentialgleichungen“
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

[3] Bronstein – Semendjajew
„Taschenbuch der Mathematik“
Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main)

[4] www.Wikipedia.org

[5] N. N. Lebedev
„Special Functions & Their Applications“
Dover Publications, Inc., New York

[6] Milton Abramowitz and Irene Stegun
„Handbook of Mathematical Functions“
Dover Publications, Inc., New York