1. Symmetrie des 2. Differentials)

Satz:

Vor.: Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.
Sei $\varphi : G \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Sei φ 2-mal differenzierbar.

Beh.: $\forall p \in G \quad \mathrm{d}_p^2\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist symmetrisch

2. Spezialfall der Cartan'schen Ableitung

Satz:

Vor.: Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Sei $V : G \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

Sei $\omega : G \to \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ definiert durch $\omega := \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \mathrm{d}x_i$

(insbesondere ist $\omega : G \to \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ stetig differenzierbar).

Beh.: $\forall p \in G \quad \left(\mathfrak{d}_p\omega = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}_pV \text{ ist selbstadjungiert}\right)$

Bem.:
1. $\mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller $\mathbb{R}$-Linearformen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2. ω ist eine sogenannte C^1-Differentialform vom Grad 1.

3. $\mathfrak{d}\ldots$ ist die sogenannte Cartan'sche Ableitung. Im Falle $n = 3$ gilt:
$\forall p \in G \quad \left(\left(\mathfrak{d}_p\omega = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{rot}_p\,(V) = 0\right)\right).$

3. Vektorpotential

Satz:

Vor.: Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Beh.:

1. Sei $\varphi \in C^2(G)$.
   Dann gilt:
   $\left(\forall p \in G \quad \left(d_p\left(\text{grad}\left(\varphi\right)\right) \text{ ist selbstadjungiert}\right)\right)$

2. Sei G sternförmig.
   Sei $k \in \mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$.
   Sei $V: \ G \to \mathbb{R}^n$ eine k-mal stetig differenzierbare Abbildung.
   Dann gilt:
   $\left(\forall p \in G \quad \left(d_p V \text{ ist selbstadjungiert}\right)\right) \quad \Rightarrow$
   $\exists \varphi \in C^{k+1}(G) \quad V = \text{grad}\left(\varphi\right)$

4. Umkehrung von 1

Satz:

Vor.: Sei $n \in \mathbb{N}_+$.

Sei G eine offene, sternförmige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Sei $\alpha : G \to \mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ eine stetig differenzierbare Abbildung.

Sei $\beta : G \to \mathfrak{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$ definiert durch

$\forall p \in g \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \left(\beta_p\right)(v, w) := \left(\left(\mathrm{d}_p\alpha\right)(v)\right)(w)$

Beh.: $\left(\forall p \in G \quad \left(\beta_p \text{ ist symmetrisch}\right)\right) \quad \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} \text{Es existiert } \varphi \in C^2(G) \text{ mit} \\ \mathrm{d}\varphi = \alpha \text{ und } \mathrm{d}^2\varphi = \beta \end{pmatrix}$

Bem.: $\mathfrak{L}^2\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right) = \left\{b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ ist bilinear}\right\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Bew.: Sei $\mathfrak{E} := \left(e_1, \dots, e_n\right)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Sei $\mathfrak{X} := \left(x_1, \dots, x_n\right)$ die zu $\mathfrak{E}$ duale Basis des $\mathfrak{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}\right)$.

Sei die Abbildung $V : G \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\forall p \in G \quad V(p) := \begin{pmatrix} \alpha_p\left(e_1\right) \\ \vdots \\ \alpha_p\left(e_n\right) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Dann gilt nach Voraussetzung:

$$V : G \to \mathbb{R}^n \text{ ist stetig differenzierbar} \tag{2}$$

und

$$\forall p \in G \quad \mathrm{d}_p V = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_p\left(\alpha_{\dots}\left(e_1\right)\right) \\ \vdots \\ \mathrm{d}_p\left(\alpha_{\dots}\left(e_n\right)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{d}_p\alpha\right)\left(e_1\right) \\ \vdots \\ \left(\mathrm{d}_p\alpha\right)\left(e_n\right) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Dann gilt zunächst:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall p \in G \quad \left(\mathrm{d}_p V\right)\left(e_j\right) = \frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{4}$$

Aus (3) folgt aber:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall p \in G \quad \left(\mathrm{d}_p V\right)\left(e_j\right) = \begin{pmatrix} \left(\mathrm{d}_p \alpha\right)\left(e_1\right) \\ \vdots \\ \left(\mathrm{d}_p \alpha\right)\left(e_n\right) \end{pmatrix}\left(e_j\right)$$

Daraus folgt nach Voraussetzung:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall p \in G \quad \left(\mathrm{d}_p V\right)\left(e_j\right) = \begin{pmatrix} \left(\beta_p\right)\left(e_1, e_j\right) \\ \vdots \\ \left(\beta_p\right)\left(e_n, e_j\right) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Da $\left(\forall p \in G \quad \left(\beta_p \text{ ist symmetrisch}\right)\right)$, folgt aus (4) und (5):

$$\left(\forall p \in G \quad \left(\mathrm{d}_p V \text{ ist selbstadjungiert}\right)\right) \tag{6}$$

Aus (2) und (6) folgt dann mit Satz 3.2. die Existenz von $\varphi \in C^2(G)$ mit

$$V = \operatorname{grad}(\varphi) \tag{7}$$

Aus (1) und (7) folgt nun für alle $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\forall p \in G$:

$$\left(\mathrm{d}_p \varphi\right)\left(e_i\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(p) = \left(\operatorname{grad}_p(\varphi)\right)_i = V_i(p) = \alpha_p\left(e_i\right)$$

bzw.

$$\mathrm{d}\varphi = \alpha \tag{8}$$

Damit folgt für alle $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\forall p \in G$

$$\mathrm{d}_p^2\varphi\left(e_i, e_j\right) = \left(\mathrm{d}_p\left(\left(\mathrm{d}_{\dots}\varphi\right)\left(e_i\right)\right)\right)\left(e_j\right) = \left(\mathrm{d}_p\left(\left(\alpha_{\dots}\right)\left(e_i\right)\right)\right)\left(e_j\right)$$

bzw.

$$\mathrm{d}_p^2\varphi\left(e_i, e_j\right) = \left(\left(\mathrm{d}_p\,(\alpha)\right)\left(e_i\right)\right)\left(e_j\right)$$

bzw. nach Voraussetzung

$$\mathrm{d}_p^2\varphi\left(e_i, e_j\right) = \left(\beta_p\left(e_i, e_j\right)\right)$$

Damit folgt schliesslich:

$$\mathrm{d}^2\varphi = \beta \tag{9}$$